

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO A PROBLEMAS DE CAMPO

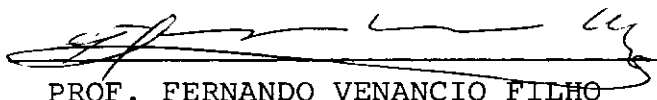
Pedro Augusto Cêzar Oliveira de Sá

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

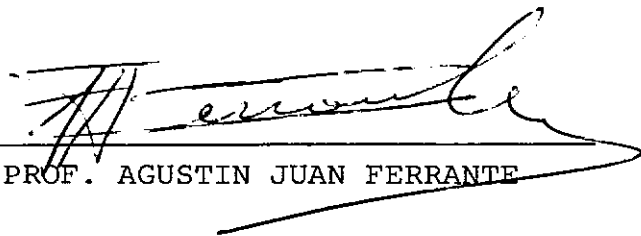
Aprovada por :



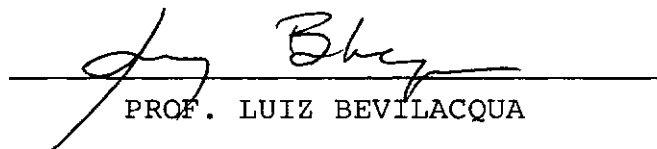
PROF. ANDRES LUDOVICO HALBRITTER
(Presidente)



PROF. FERNANDO VENANCIO FILHO



PROF. AGUSTIN JUAN FERRANTE



PROF. LUIZ BEVILACQUA

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

SETEMBRO DE 1980

SÁ, PEDRO AUGUSTO CÉZAR OLIVEIRA DE
 Aplicação do Método dos Elementos
 de Contorno a Problemas de Campo
 Rio de Janeiro 1980.

VII, 155 p. 29,7cm (COPPE-UFRJ,
 M.Sc., Engenharia Civil, 1980)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro.

1. Elementos de Contorno I.COPPE/
 UFRJ II. Título (série).

aos meus pais ,
Maria e Péricles e
à minha esposa ,
Kátia

A G R A D E C I M E N T O S

Agradecemos aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia Civil da COPPE/UFRJ que de forma direta ou indireta contribuíram na nossa formação, em especial aos professores Andres Ludovico Halbritter, pela orientação indispensável na execução do trabalho, e Weber João Mansur, pelo auxílio na fase de preparação, e ao colega Cláudio Luiz Curotto com quem estudamos e trabalhamos com objetivos similares.

Estendemos ainda nossos agradecimentos ao Núcleo de Computação Eletrônica da UFRJ pela oportunidade oferecida de utilização dos seus recursos computacionais e à Comissão Nacional de Energia Nuclear - CNEN, pelo auxílio financeiro durante a preparação e desenvolvimento do trabalho.

Somos gratos, finalmente, a Lucila pelo trabalho de datilografia e a Didico pela confecção final dos desenhos.

S U M Á R I O

Este trabalho trata da aplicação do Método dos Elementos de Contorno aos problemas de campo com domínio tridimensional isótropo, em regime permanente, governados pela equação de Poisson.

Inicialmente, são descritos o problema e o método para, em seguida, apresentar-se a aplicação propriamente dita do método, seu desenvolvimento e um programa em linguagem FORTRAN para computadores B-6700 que sistematiza a solução proposta.

A título de ilustração, são efetuadas aplicações do modelo desenvolvido a problemas de transferência de calor e de fluxo de água nos solos com as características previstas (regime permanente e meio isótropo).

Em apêndice, inclui-se o manual de utilização do programa, bem como, uma listagem do mesmo.

A B S T R A C T

This work deals with the application of the Boundary Element Method to the potential problems which bear an isotropic three-dimensional domain, are in permanent regime and are governed by Poisson's Equation.

The problem and the method are described at first. Then the application of the method and its development are followed by the description of a FORTRAN program for B-6700 computer, which sistematizes the proposed solution.

For illustration purposes, applications of the developed model to problems of Heat Transfer, and of Water Flow in Soil with anticipated characteristics (permanent regime and isotropic environment) are presented.

A detailed instruction for program utilization and its print-out are shown in the appendix.

Í N D I C E

CAP.		PG
I.	INTRODUÇÃO	1
II.	O PROBLEMA DE CAMPO	3
III.	O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E SUA APLICAÇÃO AOS PROBLEMAS DE CAMPO	10
IV.	A SOLUÇÃO NUMÉRICA	27
V.	ALGUNS TÓPICOS DO PROGRAMA PARA <u>COMPUTA</u> DORES	51
VI.	APLICAÇÕES	72
VII.	CONCLUSÕES	103
APÊNDICE:	MANUAL DE UTILIZAÇÃO E LISTAGEM DO PROGRAMA	106
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	154

APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO A PROBLEMAS DE CAMPO

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Os métodos numéricos há muito vêm constatando a sua importância na solução dos mais diversos problemas da Engenharia. Com o advento dos computadores eles se tornaram fundamentais no desenvolvimento de novas técnicas aplicadas a problemas dos mais diferentes graus de complexidade. Dentre eles figura o Método dos Elementos de Contorno que vem aceleradamente comprovando a sua importância devido a sua forma simples de apresentação e a sua já comprovada eficiência no tratamento de problemas de campo e de elasticidade linear¹. Embora seja um método numérico recente, já apresenta, teoricamente, algumas vantagens sobre os métodos hoje mais comuns e bem mais estudados e desenvolvidos, como o Método dos Elementos Finitos e o Método das Diferenças Finitas. Neste trabalho enumeramos as principais características do Método dos Elementos de Contorno no objetivo de demonstrar suas citadas simplicidade e eficiência e de justificar a clara necessidade de se estabelecer, cada vez mais, pesquisas visando o seu aprimoramento e a ampliação do seu "campo de ação".

A denominação "Método dos Elementos de Contorno", criada no Departamento de Engenharia Civil da Universidade de Southampton¹, decorre da sua principal particularidade, qual seja, a de reduzir em uma dimensão, a análise do problema em questão. Isto é, somente o contorno ou a superfície limite do domínio é que é considerada na formulação final do método.

O principal objetivo deste trabalho reside na formulação do Método dos Elementos de Contorno para problemas de campo em regime permanente num domínio tridimensional e isótropo, considerando para tanto :

- a) a equação de Poisson como referência inicial para representação matemática de tais problemas e
- b) o contorno discretizado em elementos triangulares sobre os

quais admite-se variarem linearmente as funções fundamentais do problema, a saber, o potencial e a sua derivada em relação à normal à superfície equipotencial, para apresentação de uma solução numérica.

Alguns problemas de campo requerem uma representação mais completa ou mais sofisticada do que a simples equação de Poisson como veremos no capítulo a seguir. Este fato, porém, não exclui totalmente a generalidade deste trabalho, visto que para estes casos teremos, apenas que acrescentar à referida equação, alguns outros termos que a completariam. Trata-se, portanto, de uma ampliação a ser processada e não de uma alteração radical no que aqui se apresenta.

A consideração de outros elementos que não os referidos elementos triangulares com variação linear, exigiria somente a simples mudança das funções de interpolação que especificam a variação do potencial e da sua derivada sobre o contorno, não oferecendo, portanto, maior relevância no objetivo da pesquisa, o que, contudo, não deixa de ser objeto de grande importância na medida que fornecerá maior flexibilidade nas aplicações práticas do estudo apresentado.

Na sua parte final, o trabalho apresenta exemplos ilustrativos resolvidos por um programa elaborado na linguagem FORTRAN para o computador B-6700, que certificam, como veremos na discussão dos mesmos, a importância do Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas de campo e, por extensão, a outros frequentes problemas da Engenharia.

CAPÍTULO II

O PROBLEMA DE CAMPO

Os problemas de campo abrangem um grande número de questões na Engenharia e podem ser representados matematicamente de diversas maneiras dependendo do tipo de problema, de suas particularidades e das suas condições de contorno. No entanto, todo o problema de campo na sua forma mais simples de apresentação pode ser governado pela equação de Laplace

$$\nabla^2 U = 0 \quad (\text{II-1})$$

ou pela equação de Poisson

$$\nabla^2 U + P = 0 \quad (\text{II-2})$$

onde

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad e$$

U e P são grandezas que dependem do tipo de problema.

De maneira geral, podemos definir o problema de campo como sendo todo problema que envolve "redes de fluxo" num determinado meio ou domínio. Estas redes de fluxo são conhecidas como malhas compostas por linhas de fluxo e linhas equipotenciais que, para um meio isótropo e em regime permanente (ou seja, com os potenciais constantes ao longo do tempo), são ortogonais entre si. Os problemas de campo mais comuns na Engenharia são os problemas de Transferência de Calor, Fluxo de Líquidos nos solos ou quaisquer meios porosos, problemas de corrente elétrica ou potencial eletro-magnético, Transporte de Sólidos, Torção numa barra, entre outros.

Resolver um problema de campo consiste basicamente em determinar a rede de fluxo no domínio em questão, a partir das suas condições de contorno, isto é, estudar a conexão existente entre a distribuição do potencial no domínio e os fluxos

que nele surgem. Estas condições de contorno apresentam-se na forma :

$$a) u = \bar{u} \quad \text{em } S_1 \quad (\text{potencial prescrito no contorno } S_1)$$

$$b) q = \bar{q} \quad \text{em } S_2 \quad (\text{fluxo prescrito no contorno } S_2)$$

Em geral, o fluxo através de um elemento de área po de ser escrito como

$$d^2Q = q \, dA \, dt, \quad (\text{II-3})$$

onde Q é o fluxo total,

q é o fluxo por unidade de área e de tempo,

dA é o elemento de área e

dt é a variação do tempo.

O valor de q pode ser determinado pela relação

$$q = -K (\nabla u) , \quad (\text{II-4})$$

conhecida como lei de Fourier ou equação de Biot-Fourier, onde K é uma propriedade física do material do domínio que depende , naturalmente, do problema,e

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial n} , \quad (\text{II-5})$$

que é conhecido como gradiente do potencial, sendo n a normal à uma superfície ou linha equipotencial.

Se considerarmos que K tem um valor constante pode mos substituir a segunda condição de contorno, $q = \bar{q}$, por

$$\nabla u = \bar{q}, \quad (\text{II-6})$$

onde \bar{q} , agora, é o gradiente prescrito no contorno S_2 .

O valor do fluxo q decorre portanto da equação (II-4). Como vemos, o fluxo terá sempre sentido oposto ao do gradiente visto que a constante K é positiva. Este fato está caracterizado no sinal negativo que aparece na equação (II-4)

e significa que o fluxo, entre dois pontos do domínio, se desenvolve do ponto de maior potencial ao ponto de menor potencial.

Em muitos poucos casos conhecemos a solução exata para os diversos tipos de problemas de campo que se apresentam na prática, o que nos leva, portanto, a recorrer aos métodos numéricos na tentativa de solucioná-los. No presente trabalho, tentamos dar alguns passos no objetivo de conseguirmos algum desenvolvimento na aplicação do Método dos Elementos de Contorno a problemas de campo com domínio tridimensional e isótropo, regidos ou representados pela equação de Poisson acima indicada, ou seja, em regime permanente.

Abordaremos especificamente dois tipos de problemas de campo :

- a) Transferência de Calor e
- b) Fluxo de Água nos Solos.

Transferência de Calor :

Num problema de Transferência de Calor o potencial é a temperatura e o fluxo é o fluxo de calor, ou seja,

$$U = T \quad e \quad (II-7)$$

$$q = - K_n \frac{\partial T}{\partial n} , \quad (II-8)$$

onde T é a temperatura,

$\frac{\partial T}{\partial n}$ é o gradiente de temperatura (derivada da temperatura em relação à normal à superfície equipotencial ou isotérmica) e

K_n é a condutividade térmica do material do domínio, na direção n.

A equação diferencial básica da propagação de calor num meio material em regime transiente é, segundo a Termodinâmica², a que segue :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + q_v + M\mu \text{ Diss } F(\omega) =$$

$$= c\gamma \frac{DT}{dt} - M \frac{Dp}{dt} \quad (\text{II-9})$$

onde K_x , K_y e K_z $[\text{Kcal/mh } ^\circ\text{C}]$ são as condutividades térmicas nas direções x , y e z ,

q_v $[\text{Kcal/m}^3\text{h}]$ é o calor gerado internamente no domínio ,

$M = \frac{1}{427} [\text{Kcal/Kgm}]$ é o equivalente mecânico de calor ,

$\mu [\text{Kcal/m}^2]$ é a viscosidade dinâmica do domínio,

$c [\text{Kcal/Kg } ^\circ\text{C}]$ é o calor específico,

$\gamma [\text{Kg/m}^3]$ é o peso específico do material do domínio,

$p [\text{Kg/m}^2]$ é a pressão num dado ponto e num instante de tempo e

$\omega [\text{m/h}]$ é a velocidade de fluxo num dado ponto e num instante de tempo.

Na equação (II-9) temos ainda que :

$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial}{\partial z} \quad e$$

$$\text{Diss } F(\omega) = 2 \left[\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right)^2 \right] +$$

$$+ \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} + \frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} + \frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial z} + \frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right)^2 -$$

$$- \frac{2}{3} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right)^2 \quad \text{que é conhecida como "função Dissi}$$

pação", onde ω_x , ω_y e ω_z são os valores da velocidade nas

direções x , y e z .

Se a propagação de calor se procede num meio isótropo e em regime permanente, a função Dissipação e o segundo termo da equação (II-9) se anulam, e $K_x = K_y = K_z = K = \text{constante}$. Admitindo tais simplificações chegamos à equação

$$K \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + q_v = 0 \quad (\text{II-10})$$

que é a equação de Poisson

$$\nabla^2 T + P = 0 \quad (\text{II-11})$$

como mostrada no princípio do capítulo, onde P é o quociente entre q_v e K , ou seja,

$$P = \frac{q_v}{K} \quad (\text{II-12})$$

A equação (II-11) pode ser usada para representar um vasto número de problemas de transferência de calor. Neste trabalho mostraremos um exemplo prático de condução de calor através das paredes de uma estrutura cujo modelo assemelha-se ao de um vaso de pressão de um reator nuclear.

Fluxo de Água nos Solos :

Nos problemas de fluxo de água nos solos ou de filtração, como são conhecidos, o potencial é a pressão ou a carga total representada pela altura h da lâmina d'água sobre o solo e o fluxo é o fluxo de água através do mesmo solo, indicados por :

$$U = h \quad e \quad (\text{II-12})$$

$$q = -K_n \quad i = -K_n \frac{\partial h}{\partial n} \quad (\text{II-13})$$

onde K_n é a permeabilidade na direção n , num determinado ponto

e

$i = \frac{\partial h}{\partial n}$ é o gradiente hidráulico.

Segundo a Mecânica dos Solos a equação que representa o problema de filtração nos solos pode ser escrita da maneira como segue³ :

$$\begin{aligned} & (K_x + \frac{\partial K_x}{\partial x} dx) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial K_x}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + (K_y + \frac{\partial K_y}{\partial y} dy) \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \\ & + \frac{\partial K_y}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} + (K_z + \frac{\partial K_z}{\partial z} dz) \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial K_z}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} = \\ & = \frac{1}{1+e} (e \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial e}{\partial t}) \end{aligned} \quad (\text{II-14})$$

onde K_x , K_y e K_z são as permeabilidades num determinado ponto ,
nas direções x, y e z, respectivamente,
e é o índice de vazios do solo e
S é o grau de saturação do solo.

Observemos que se as permeabilidades K_x , K_y e K_z são constantes em suas respectivas direções, ou seja, se elas não variam pontualmente, a equação (II-14) se apresenta numa forma bem mais simples,

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + K_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{1}{1+e} (e \frac{\partial S}{\partial t} + S \frac{\partial e}{\partial t}) \quad (\text{II-15})$$

visto que, dessa forma, os valores $\frac{\partial K_i}{\partial i}$, $i = x, y \text{ e } z$, são nulos.

Se ainda supomos o fluxo estacionário, ou seja, que as grandezas S e e são constantes, e que a permeabilidade é constante e igual a K em todas as direções, a equação acima pode ser simplificada mais uma vez e apresentar-se como

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{II-16})$$

que é, naturalmente, a já citada equação de Laplace para um do mínio tridimensional.

A equação (II-16) nos possibilita representar uma série de problemas de filtração (meio isótropo e regime permanente) que a Mecânica dos Solos nos oferece. Para um fluxo uni ou bi-dimensional tem-se conseguido, com certa facilidade, traçar as redes de fluxo pertinentes a cada tipo de problema de filtração que nos ocorre, o que não acontece quando o fluxo observado é tridimensional, para o qual as dificuldades em se determinar a carga total ou o fluxo em qualquer direção são bem mais acentuadas. Surge daí a principal importância da aplicação de métodos numéricos na solução de tal problema. Na fase final deste trabalho, apresentaremos uma aplicação singela porém significativa do Método dos Elementos de Contorno a um problema desta natureza. Trata-se, como veremos, do estudo do fluxo de água sob uma barragem de concreto.

Passamos, a seguir, à apresentação do Método.

CAPÍTULO III

O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E SUA
APLICAÇÃO AOS PROBLEMAS DE CAMPO

Os métodos de contorno são aqueles em que estabelecemos funções aproximadas de maneira a satisfazerem a equação que governa o fenômeno estudado, em seu domínio, sem necessariamente satisfazerem às condições de contorno. Estes métodos diferenciam-se substancialmente dos chamados "métodos de domínio", tais como os conhecidos Método dos Elementos Finitos e Método das Diferenças Finitas, que determinam procedimento justamente oposto. Isto é, nestes métodos, procuramos funções que satisfaçam às condições de contorno, total ou parcialmente, e que não necessariamente devam satisfazer a equação que governa ou representa o problema.

Por outro lado, assim como os "métodos de domínio", os métodos de contorno podem ser sistematizados com o auxílio das formulações dos Resíduos Ponderados.

Um problema de campo, como diversos outros problemas da Engenharia, pode ser abordado também por métodos de contorno com rara simplicidade. Suponhamos, então, um problema desta natureza e mostremos as diferenças básicas no seu tratamento pelo Método dos Elementos Finitos e por métodos de contorno.

Seja, portanto, o problema de campo

$$\nabla^2 u = 0, \quad (\text{III-1})$$

no domínio V , com as condições de contorno,

$$u = \bar{u} \quad \text{no contorno } S_1 \quad \text{e}$$

$$\nabla u = \bar{q} \quad \text{no contorno } S_2,$$

onde \bar{u} e \bar{q} são valores conhecidos de u e ∇u .

O método dos resíduos ponderados nos fornece a seguinte relação ¹ :

$$\int_V (\nabla^2 u) \omega dV = \int_{S_1} [(\bar{u} - u) \nabla \omega] \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} [(\nabla u - \bar{q}) \omega] \cdot d\vec{s} \quad (\text{III-2})$$

onde ω é uma função-peso diferenciável que deve assumir valores não-nulos no contorno, e as expressões do segundo membro da equação (III-2) representam produtos escalares.

No Método dos Elementos Finitos, a condição essencial de contorno, ou seja, $u = \bar{u}$ é satisfeita plenamente e a função-peso ω é escolhida como sendo a variação do potencial u , isto é,

$$\omega = \delta u \quad (\text{III-3})$$

Assim a expressão dos resíduos ponderados simplifica-se, apresentando-se como

$$\int_V (\nabla^2 u) \delta u dV = \int_{S_2} [(\nabla u - \bar{q}) \delta u] \cdot d\vec{s} \quad (\text{III-4})$$

A primeira Identidade de Green⁴ nos fornece a seguinte relação :

$$\int_V (\nabla^2 u) \delta u dV = - \int_V (\nabla u \cdot \nabla \delta u) dV + \int_{S_2} (\delta u \nabla u) \cdot d\vec{s} \quad (\text{III-5})$$

Substituindo a equação (III-5) no primeiro membro da equação (III-4) e fazendo as devidas simplificações, temos :

$$\int_V (\nabla u \cdot \nabla \delta u) dV = \int_{S_2} \delta u \bar{q} \cdot d\vec{s} \quad (\text{III-6})$$

Definindo funções apropriadas para u e δu , e discretizando o domínio em elementos convenientes, obtemos um sistema de equações

$$\underline{\underline{K}} \underline{\underline{U}} = \underline{\underline{F}} \quad , \quad (\text{III-7})$$

cuja solução é o objeto do Método dos Elementos Finitos.

Voltemos, porém, à equação (III-2) que define a expressão dos Resíduos Ponderados sem a simplificação peculiar do Método dos Elementos Finitos, ou seja, sem a consideração de que a condição $u = \bar{u}$ seja satisfeita plenamente.

Se recorrermos, agora, à segunda Identidade de Green⁴, isto é,

$$\int_V (\nabla^2 u) \omega \, dV = \int_V u (\nabla^2 \omega) \, dV + \int_S (\omega \nabla u - u \nabla \omega) \cdot \underline{ds} \quad , \quad (\text{III-8})$$

e substituí-la na equação (III-2), chegamos, após as devidas simplificações à equação

$$\int_V u (\nabla^2 \omega) \, dV = \int_S (u \nabla \omega) \cdot \underline{ds} - \int_S (\omega \nabla u) \cdot \underline{ds} \quad , \quad (\text{III-9})$$

com $u = \bar{u}$ em S_1 e $\nabla u = \bar{q}$ em S_2 .

Como a função-peso ω é arbitrária, podemos fazer a sua escolha de modo que satisfaça à equação

$$\nabla^2 \omega = 0. \quad (\text{III-10})$$

Assim estabelecido, a equação (III-9) pode ser escrita na forma

$$\int_S (u \nabla \omega) \cdot \underline{ds} = \int_S (\omega \nabla u) \cdot \underline{ds} \quad . \quad (\text{III.11})$$

Como poderemos verificar, posteriormente, esta última relação nos levará também a um sistema de equações

$$\underline{A} \, \underline{X} = \underline{F} \quad , \quad (\text{III-12})$$

semelhantemente ao Método dos Elementos Finitos.

Esta última abordagem corresponde ao tratamento dos problemas de campo por métodos de contorno.

Um detalhe importante é a escolha da função ω , que

pode ser feita de diversas maneiras. Na finalidade de se obter melhores resultados nas aplicações dos métodos de contorno, de vemos procurar, para valor de ω , a "solução fundamental"¹ da equação que governa o fenômeno estudado. Esta solução fundamental, para o caso dos problemas de campo, é aquela obtida da consideração de um potencial unitário aplicado num ponto de um domínio infinito.

Mais adiante, no desenvolvimento do método em estudo, apresentaremos esta solução fundamental para problemas de campo em domínio tridimensional.

Retornemos, agora, às equações (III-6) e (III-11) que definem o Método dos Elementos Finitos e os métodos de contorno, respectivamente. Se fazemos uma análise comparativa entre as duas equações, podemos observar que na primeira equação trabalhamos com todo o domínio do problema, visto que necessitamos desenvolver integrais do tipo

$$\int_V (\nabla u \cdot \nabla \delta u) dV,$$

e que na segunda, trabalhamos apenas com o contorno do problema. Isto estabelece, por diversas razões, a simplicidade dos métodos de contorno em relação aos métodos de domínio, como é o caso do Método dos Elementos Finitos. Em suma, podemos apontar, por exemplo, as seguintes vantagens dos métodos de contorno, como consequência da redução do problema em uma dimensão :

- a) diminui o número de dados necessários à solução;
- b) trata com maior segurança problemas sob domínios semi-infinitos ou infinitos;
- c) reduz o trabalho do calculista, visto que apenas o contorno deve ser discretizado, e
- d) pelo menos teoricamente, o tempo de processamento num computador é menor se realizamos um programa sistemático para a aplicação do método.

Contudo, podemos apontar também uma séria desvantagem dos métodos de contorno em relação ao Método dos Elementos Finitos. É que a matriz A do sistema (III-12) é uma matriz "cheia" (isto é, não apresenta características de banda) e não

é simétrica, o que não acontece com a matriz de rigidez \tilde{K} do sistema (III-7). Isto, porém, pode ser parcialmente contornado desde que façamos uma divisão do domínio em regiões menores, o que acarreta numa matriz banda. Esta abordagem, todavia, não é objeto do presente estudo.

Como já dito, o método em questão recebe a denominação de Método dos Elementos de Contorno. Esta denominação decorre principalmente do fato de que necessitaremos sempre em suas aplicações, de discretizarmos o contorno em elementos de modo análogo ao caso do Método dos Elementos Finitos.

O nosso objetivo, já declarado, seria, então, aplicar este Método dos Elementos de Contorno a problemas de campo em regime permanente, com um domínio tridimensional e isotropo. Para tanto vamos considerar que tais problemas sejam representados pela equação de Poisson ou, em particular, pela equação de Laplace (caso em que não há geração interna de potencial no domínio).

Desta forma, podemos dizer que nossos problemas são governados pela equação

$$\nabla^2 u + p = 0 \quad (\text{III-13})$$

no domínio tridimensional V ,

onde u é o potencial considerado e

p é uma função de posição que depende do problema em questão.

As condições essenciais e naturais de contorno, serão, respectivamente

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \text{ no contorno } S_1 \text{ e} \\ \nabla u &= \bar{q} \text{ no contorno } S_2. \end{aligned}$$

Como já anunciamos, os Resíduos Ponderados nos possibilitam escrever que

$$\int_V (\nabla^2 u + p) \omega dV = \int_{S_1} [(\bar{u} - u) \nabla \omega] \cdot d\tilde{s} + \int_{S_2} [(\nabla u - \bar{q}) \omega] \cdot d\tilde{s}.$$

Com o auxílio da Segunda Identidade de Green, a expressão acima pode ser transformada, como anteriormente, em :

$$\int_V u (\nabla^2 \omega) dV + \int_V p \omega dV = \int_S (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} - \int_S (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s}, \quad (\text{III-15})$$

Desta feita temos duas integrais sobre o domínio que precisam desaparecer para levarmos o problema totalmente ao contorno. Como dissemos, vamos procurar, para tal, a "solução fundamental" da equação de Poisson da maneira como foi definida, isto é, sob a consideração de um potencial unitário aplicado num ponto de um domínio infinito. Isto corresponde, portanto, a escolhermos a função ω de modo a satisfazer a equação

$$\nabla^2 \omega + \delta_i = 0, \quad (\text{III-16})$$

onde δ_i é a função delta de Dirac no ponto i do domínio.

Se o domínio é tridimensional e isótropo, esta solução fundamental¹ é

$$\omega = \frac{1}{4\pi r}, \quad (\text{III-17})$$

onde r é a distância do ponto de aplicação i do potencial unitário a um ponto qualquer onde desejamos determinar o valor da função ω .

Ora, se integrarmos, em todo o domínio, os membros da equação (III-16) multiplicados pelo potencial u , teremos :

$$\int_V (\nabla^2 \omega + \delta_i) u dV = 0. \quad (\text{III-18})$$

Daí, podemos escrever que

$$\int_V (\nabla^2 \omega) u dV = - \int_V u \delta_i dV, \quad (\text{III-19})$$

ou, em virtude das propriedades da função δ_i , que

$$\int_V (\nabla^2 \omega) u dV = -\mu_i, \quad (\text{III-20})$$

onde μ_i é o valor do potencial u no ponto i .

Substituindo a equação (III-20) na equação (III-15),

temos que

$$-\mu_i + \int_V p \omega dV = \int_S (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} - \int_S (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s} \quad (\text{III-21})$$

Nesta última equação ainda persiste uma integral sobre o domínio, qual seja,

$$\int_V p \omega dV.$$

A fim de reduzi-la ao contorno podemos, por exemplo, recorrer ao artifício da transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas de maneira que, de

$$dV = dx dy dz, \quad (\text{III-22})$$

passamos a ter

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi, \quad (\text{III-23})$$

onde a expressão $r^2 \sin \theta$ é o determinante do Jacobiano das funções de transformação

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \phi, \\ y &= r \sin \theta \sin \phi \text{ e} \\ z &= r \cos \theta, \end{aligned}$$

com r , θ e ϕ mostrados na figura (III-1).

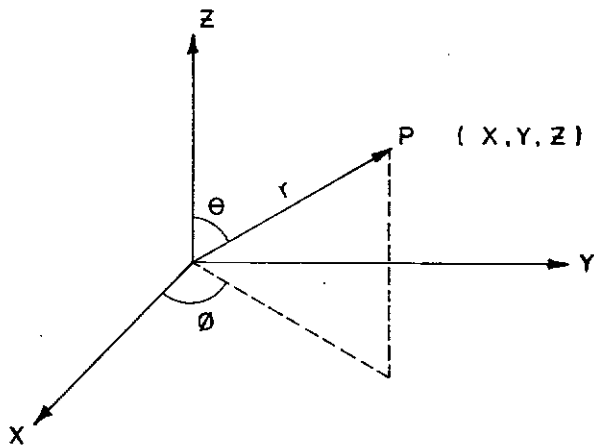


FIGURA (III - 1)

Para simplificar os cálculos, consideremos que a função p é constante em todos os pontos do domínio. Assim sendo, podemos escrever que

$$\int_V p \omega dV = p \int_V \omega dV. \quad (\text{III-24})$$

Substituindo no segundo membro desta equação, as expressões (III-17) e (III-23), temos que

$$\int_V p \omega dV = \frac{p}{4\pi} \int_V r \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi. \quad (\text{III-25})$$

Assim, se resolvermos a integral em r , ou seja,

$$\int_V p \omega dV = \frac{pr^2}{8\pi} \int_{\theta, \phi} \sin\theta \, d\theta \, d\phi, \quad (\text{III-26})$$

reduzimos, em uma dimensão, a integral

$$\int_V p \omega dV,$$

levando-a também ao contorno.

No entanto, uma nova abordagem no intuito de levar esta integral ao contorno, é apresentada no capítulo seguinte quando discutiremos a solução numérica apresentada para o problema em questão. A solução de tal integral para o potencial unitário aplicado num determinado ponto i nos fornece um valor que denominaremos de B_i , ou seja,

$$\int_V p \omega dV = B_i \quad (\text{III-27})$$

Substituindo a equação (III-27) na equação (III-21), obtemos

$$-\mu_i + B_i = \int_S (u \nabla \omega) \cdot d\mathbf{s} - \int_S (\omega \nabla u) \cdot d\mathbf{s}, \quad (\text{III-28})$$

que é a expressão representativa da aplicação do Método dos Elementos de Contorno a problemas de campo, sendo i um ponto do interior do domínio.

Se o ponto i estiver localizado no contorno, a equação (III-28), naturalmente, não representará de maneira correta o problema em questão. A fim de conseguirmos, então, a

expressão correta para este caso, façamos as seguintes considerações :

a) suponhamos que exista sobre o contorno uma porção de esfera de raio ϵ e centro no ponto i deste contorno (ponto este em que consideramos aplicado o potencial unitário), conforme a figura (III-2). Assim sendo, o ponto i passa a pertencer ao interior do domínio e , conseqüentemente, a equação (III-28) é válida.

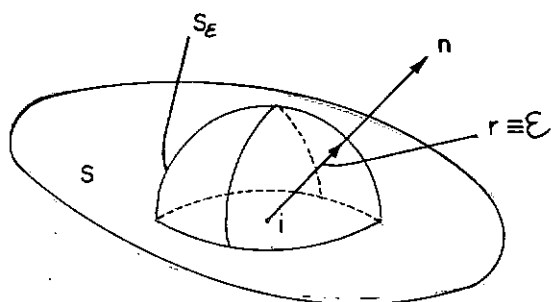


FIGURA (III -2)

b) determinamos, em seguida, o limite das integrais do segundo membro de (III-28) para quando o raio ϵ , da porção esférica sugerida, tende ao valor zero. Assim, o ponto i volta a pertencer ao contorno e nosso problema está resolvido.

Inicialmente, escrevamos a primeira integral da equação (III-28) como

$$\int_S (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} = \int_{S-S_\epsilon} (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} + \int_{S_\epsilon} (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} \quad (\text{III-29})$$

$$\text{com} \quad \omega = \frac{1}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi \epsilon} \quad (\text{III-30})$$

$$e \quad \nabla \omega = \frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\partial \omega}{\partial r} = \frac{-1}{4\pi r^2} = \frac{-1}{4\pi \epsilon^2}, \quad (\text{III-31})$$

conforme podemos verificar na figura (III-2), e apliquemos o limite referido no item b acima citado :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\epsilon} (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} = \int_S (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s}, \quad (\text{III-32})$$

pois $S_\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \frac{u}{4\pi\varepsilon^2} ds. \quad (\text{III-33})$$

Como ε é constante em todos os pontos de S_ε , podemos acrescentar que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u}{4\pi\varepsilon^2} \int_{S_\varepsilon} ds. \quad (\text{III-34})$$

Definindo α_i como o percentual da área total de uma superfície esférica que corresponde à área da superfície S_ε ($0 < \alpha_i < 1$),

$$\int_{S_\varepsilon} ds = \alpha_i 4\pi\varepsilon^2. \quad (\text{III-35})$$

Assim, a equação (III-34) pode ser reescrita como

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} = - \alpha_i \mu_i, \quad (\text{III-36})$$

onde μ_i é o potencial u no ponto i .

Logo, na equação (III-28), devemos substituir o termo

$$\int_S (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s}$$

por
$$\int_S (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} = \alpha_i \mu_i.$$

Repetindo o mesmo raciocínio com relação à segunda integral da equação (III-28), temos :

$$\int_S (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s} = \int_{S-S_\varepsilon} (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s} + \int_{S_\varepsilon} (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s} \quad (\text{III-37})$$

Aplicando, como anteriormente, o limite para quando ε tende a zero, achamos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S-S_\varepsilon} (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s} = \int_S (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s}, \quad (\text{III-38})$$

pois $S_\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, e

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\partial u}{\partial n} \int_{S_\epsilon} ds. \quad (\text{III-39})$$

Com $\int_{S_\epsilon} ds = \alpha_i 4\pi\epsilon^2$, temos, finalmente, que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{S_\epsilon} (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s} = 0. \quad (\text{III-40})$$

Logo, a segunda integral da equação (III-28) permanece sem modificações ou acréscimos de novos termos.

Assim estabelecido, podemos escrever uma equação equivalente à equação (III-28), para pontos i no contorno, da maneira que segue :

$$c_i u_i + \int_S (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} = \int_S (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s} + B_i, \quad (\text{III-41})$$

onde $c_i = 1 - \alpha_i$.

Como foi esclarecido na fase preliminar do presente estudo, o contorno do domínio deverá ser discretizado em elementos, semelhantemente ao Método dos Elementos Finitos, na intenção de se apresentar uma solução numérica para o problema em discussão. Num domínio tridimensional, estes elementos, naturalmente, serão bidimensionais ou planos. Assim feito, a equação (III-41) pode ser reescrita da seguinte forma :

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^m \int_{S_j} (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} = \sum_{j=1}^m \int_{S_j} (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s} + B_i \quad (\text{III-42})$$

onde m é o número total de elementos e S_j é a superfície do elemento j .

Vamos, agora, exprimir os valores do potencial u e do gradiente ∇u , dos pontos de cada elemento, em função dos seus valores específicos nos nós do elemento respectivo, através de funções de interpolação. Isto nos dá as seguintes relações :

$$u = [N_j] \{u\}_j \quad e$$

$$\nabla u = [N] \{ \nabla u \}_j \quad (\text{III-43})$$

onde $[N]$ é o vetor-linha de interpolação,
 $\{u\}_j$ é o vetor-coluna dos valores do potencial nos
 nós do elemento j , e
 $\{\nabla u\}_j$ é o vetor-coluna dos valores do gradiente nos
 nós do elemento j .

Substituindo as relações (III-43) na equação (III-42), temos que

$$c_i \mu_i + \sum_{j=1}^m \int_{s_j} ([N] \nabla \omega) \cdot d\vec{s} \{u\}_j = \sum_{j=1}^m \int_{s_j} [N] \omega ds \{\nabla u\}_j + B_i \quad (\text{III-44})$$

Esta expressão pode ainda ser escrita como

$$c_i \mu_i + \sum_{j=1}^m [\hat{H}]_{ij} \{u\}_j = \sum_{j=1}^m [G]_{ij} \{\nabla u\}_j + B_i \quad (\text{III-45})$$

onde $[\hat{H}]_{ij} = \int_{s_j} ([N] \nabla \omega) \cdot d\vec{s}$ e

$$[G]_{ij} = \int_{s_j} \omega [N] ds, \quad (\text{III-46})$$

considerando o potencial unitário aplicado no ponto i do contorno.

Se ordenarmos de maneira adequada os termos das somatórias presentes na equação (III-45), podemos exprimi-la como

$$c_i \mu_i + [\hat{H}]_i \{u\} = [G]_i \{\nabla u\} + B_i, \quad (\text{III-47})$$

onde $[\hat{H}]_i$ e $[G]_i$ são vetores-linha que armazenam as somatórias dos termos $[\hat{H}]_{ij}$ e $[G]_{ij}$, respectivamente, correspondentes a um mesmo nó do contorno, e

$\{u\}$ e $\{\nabla u\}$ são vetores-coluna que armazenam os valores dos potenciais e dos gradientes de todos os nós do contorno.

Evidentemente, os quatro vetores acima referidos, possuem, cada um deles, n termos, sendo n o número de nós no contorno total S .

Com referência ao primeiro membro da equação (III-47), podemos acrescentar, ainda, que o termo de $[H]_i$, correspondente ao nó i , pode ser adicionado à constante c_i e a referência da equação apresentar-se como

$$[H]_i \{u\} = [G]_i \{\nabla u\} + B_i \quad (\text{III-48})$$

onde

$$h_{ii} = \hat{h}_{ii} + c_i \text{ e}$$

$$h_{ij} = \hat{h}_{ij}, \text{ para } i \neq j,$$

sendo h_{ij} e \hat{h}_{ij} os termos de $[H]_i$ e $[\hat{H}]_i$, respectivamente, correspondentes ao nó j .

Se, para cada um dos n nós do contorno S , nós repetirmos a equação (III-48), vamos obter, naturalmente, um sistema de equações lineares envolvendo os potenciais e os gradientes em todo o contorno S . Este sistema pode ser expresso na notação matricial, como segue :

$$\underline{H}\underline{U} = \underline{G}\underline{Q} + \underline{B} \quad (\text{III-49})$$

onde \underline{H} e \underline{G} são matrizes quadradas de ordem $n \times n$, cujos termos são calculados da forma anteriormente descrita, e

\underline{U} , \underline{Q} e \underline{B} são vetores-coluna de ordem n , que reservam, respectivamente, os valores dos potenciais, dos gradientes e dos termos correspondentes à geração interna do potencial, referentes à aplicação do potencial unitário nos diversos pontos do contorno.

Se invocarmos, agora, as condições de contorno do problema em discussão, quais sejam,

$$u = \bar{u} \quad \text{no contorno } S_1 \text{ e}$$

$$\nabla u = \bar{q} \quad \text{no contorno } S_2,$$

verificamos que o sistema (III-49) pode ter os termos de cada linha reordenados em função do fato de que o modelo estabelece que nos pontos onde o potencial é conhecido, o gradiente é incógnito e vice-versa. Assim, se no primeiro membro do referido sistema, colocarmos os termos referentes aos valores incógnitos do potencial e do gradiente, e no segundo membro colocarmos os termos referentes aos valores conhecidos, obteremos novo sistema que, após efetuadas as devidas operações matemáticas pode ser apresentado na forma

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{F}}, \quad (\text{III-50})$$

onde $\underline{\underline{A}}$ é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, composta pelas colunas das matrizes $\underline{\underline{G}}$ e $\underline{\underline{H}}$ que correspondem aos valores incógnitos de u e ∇u ,

$\underline{\underline{X}}$ é um vetor que armazena os valores desconhecidos do potencial e do gradiente nos pontos do contorno, que se constitui, naturalmente, na incógnita do sistema (III-50), e

$\underline{\underline{F}}$ é o vetor constituído dos termos resultantes de $\underline{\underline{A}}' \underline{\underline{X}}' + \underline{\underline{B}}$, sendo $\underline{\underline{A}}'$ a matriz composta pelas colunas de $\underline{\underline{G}}$ e $\underline{\underline{H}}$ que correspondem aos valores conhecidos de u e ∇u , e $\underline{\underline{X}}'$ o vetor composto por estes valores.

O objeto do modelo acima descrito é, evidentemente, determinar o vetor $\underline{\underline{X}}$ e assim, conhecermos, em todo o contorno, a variação do potencial e do gradiente. Para tal, restamos apenas resolver o sistema (III-50) por qualquer dos processos existentes e já amplamente estudados como, por exemplo, o processo da triangularização de Gauss que é o que usaremos no presente estudo.

Se nos interessa, como objetivo último, traçar a rede de fluxo no domínio do problema especificamente abordado, se faz necessário, após a solução do sistema (III-50), determinarmos o valor do potencial em alguns pontos estratégicos do interior do domínio. Para tanto, devemos recorrer à equação (III-28) que reescrevemos agora, como :

$$\mu_i = \int_S (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s} - \int_S (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} + B_i \quad (\text{III-51})$$

Esta equação, como vimos, nos fornecerá o valor do potencial u em qualquer ponto i do interior do domínio. Da mesma maneira como fizemos para a equação (III-41), podemos representá-la também na forma matricial. Deste intento resulta que

$$\mu_i = [G]_i \{ \nabla u \} - [\hat{H}]_i \{ u \} + B_i, \quad (\text{III-52})$$

com $[G]_i$, $[\hat{H}]_i$, $\{u\}$ e $\{\nabla u\}$ já anteriormente definidos.

Para um número p de pontos internos ao domínio, temos um novo sistema,

$$\underline{U}_p = \underline{GQ} - \underline{\hat{H}U} + \underline{B}, \quad (\text{III-53})$$

onde \underline{U}_p é um vetor-coluna de p posições que se constitui na incógnita do sistema acima,

\underline{G} e $\underline{\hat{H}}$ são matrizes retangulares de ordem $p \times n$ cujos termos são calculados de maneira já descrita,

\underline{U} e \underline{Q} são os vetores-coluna de ordem n que armazenam os potenciais e gradientes dos pontos do contorno, nesta altura já totalmente determinados, e

\underline{B} é o vetor-coluna de ordem p , ao qual se atribue os valores dos termos correspondentes à geração interna de potencial, referentes à aplicação do potencial unitário nos pontos do interior do domínio.

Após o exposto, concluímos que no Método dos Elementos de Contorno, mesmo quando desejamos estudar um problema no interior de seu domínio, o fazemos estabelecendo uma relação direta dos valores das funções envolvidas no tal problema (no caso, o potencial e o gradiente), em pontos situados no contor

no do referido domínio, sem a necessidade de discretizarmos este domínio, ou seja, evitando-se o trabalho de termos que esta belecer elementos que envolvam o domínio como um todo. A discretização necessária e suficiente restringe-se, como acabamos de ver, simplesmente ã(s) superfície(s) de contorno, isto é , ã(s) superfície(s) limite(s) do domínio.

A fim de concluirmos o presente capítulo, atentemos a um detalhe que poderia nos trazer preocupações que é o fato de termos de determinar as constantes c_i definidas anteriormente. Tais constantes provêm, como vimos, da solução de integrais que não oferecem grandes facilidades na sua sistematização de cálculo. Este problema origina-se no fato de que tais constantes dependem da forma apresentada pelo contorno na região que circunda o ponto i , ao qual cada uma delas está relacionada, como vemos nas equações (III-36) e (III-40). Estas equações apresentam integrais que, apesar de serem de simples solução, exigem um grande trabalho computacional devido a este fato, dificultando, desta maneira, uma formulação do método descrito, com o objetivo de utilizá-lo através de um programa para computador.

Todavia, esta dificuldade é aparente pois pode ser facilmente contornada se fizermos as seguintes considerações:

a) em primeiro lugar, consideremos que não haja geração interna de potencial, o que acarreta na nulidade do vetor \underline{B} do sistema (III-49);

b) em seguida, suponhamos aplicado, em todo o contorno, um potencial uniforme, o que nos leva a concluir que o gradiente será nulo também em todo e qualquer ponto deste contorno.

Fazendo uso de tais considerações, o sistema (III-49) se reduz a

$$\underline{H}\underline{U} = \underline{0} , \quad (\text{III-54})$$

de onde concluímos que a soma dos termos de uma mesma linha da matriz \underline{H} é nula pois se o potencial é uniforme em todo o

contorno e igual a u , uma determinada linha i do sistema (III-54) torna-se

$$\left(\sum_{j=1}^n h_{ij} \right) u = 0, \quad (\text{III-55})$$

e, portanto,

$$\sum_{j=1}^n h_{ij} = 0, \quad (\text{III-56})$$

Desta afirmativa, concluímos que os termos da diagonal da matriz \underline{H} podem ser determinados como a somatória dos demais termos da linha correspondente, com o sinal trocado, ou seja,

$$h_{ii} = - \sum_{j=1}^n h_{ij} \quad \text{para } i \neq j. \quad (\text{III-57})$$

Ora, se as constantes c_i , são utilizadas exclusivamente nos cálculos destes termos da diagonal de \underline{H} , a determinação de seus valores torna-se desnecessária em consequência do que exprime a equação (III-57).

Convém notarmos, ainda, que as considerações invocadas no intuito de estabelecermos a equação (III-57), não particularizam a matriz \underline{H} , visto que, na determinação de seus termos, as condições de contorno do problema não oferecem qualquer influência.

Esta formulação matricial, enfim exposta, do Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas de campo governados pela equação de Poisson, se consiste, evidentemente, na solução numérica para o problema em estudo. Após a apresentação dos tópicos específicos desta solução, podemos sugerir um programa para computador que a sistematize. Estes itens se constituem no objeto dos capítulos a seguir.

CAPÍTULO IV

A SOLUÇÃO NUMÉRICA

Determinação dos elementos das matrizes \underline{G} e \underline{H} :

Uma vez estabelecida a discretização do contorno em elementos com a finalidade de se esboçar uma solução numérica para o problema em estudo, chegamos, como exposto no capítulo precedente, a um simples sistema de equações lineares cuja solução nos permite conhecer a distribuição dos potenciais e dos gradientes no contorno e, posteriormente, em todo o domínio. Passemos, então, ao estudo referente à determinação dos parâmetros numéricos do referido sistema.

Como vimos, a equação

$$c_i \mu_i + \sum_{j=1}^m \int_{s_j} (u \nabla \omega) \cdot d\vec{s} = \sum_{j=1}^m \int_{s_j} (\omega \nabla u) \cdot d\vec{s} + B_i \quad (\text{IV-1})$$

se constitui na relação básica do nosso objetivo de estabelecer a citada solução numérica. Com a adoção das relações

$$u = [\underline{N}] \{u\}_j \quad (\text{IV-2})$$

$$e \quad \nabla u = [\underline{N}] \{\nabla u\}_j \quad (\text{IV-3})$$

que nos permite determinar o potencial e o gradiente em qualquer ponto de um dado elemento, em função dos seus valores nos nós deste elemento, chegamos à expressão

$$c_i \mu_i + \sum_{j=1}^m [\hat{\underline{H}}]_{ij} \{u\}_j = \sum_{j=1}^m [\underline{G}]_{ij} \{\nabla u\}_j + B_i, \quad (\text{IV-4})$$

onde, naturalmente, os vetores $[\hat{\underline{H}}]_{ij}$ e $[\underline{G}]_{ij}$ se escrevem como

$$[\hat{\underline{H}}]_{ij} = \int_{s_j} ([\underline{N}] \nabla \omega) \cdot d\vec{s} \quad (\text{IV-5})$$

$$e [G]_{ij} = \int_{s_j} \omega [N] ds. \quad (IV-6)$$

O vetor $[N]$, como definido, vai depender, naturalmente, do tipo de elemento que escolhermos e de como supomos ser a variação das funções u e ∇u no domínio do problema. Tal vetor, portanto, poderá se compor de diversas maneiras. No presente estudo, vamos considerar, por razões de simplicidade, que o contorno venha discretizado em elementos triangulares planos e que as funções u e ∇u variem linearmente sobre tais elementos. Assim exposto, o referido vetor se apresenta como

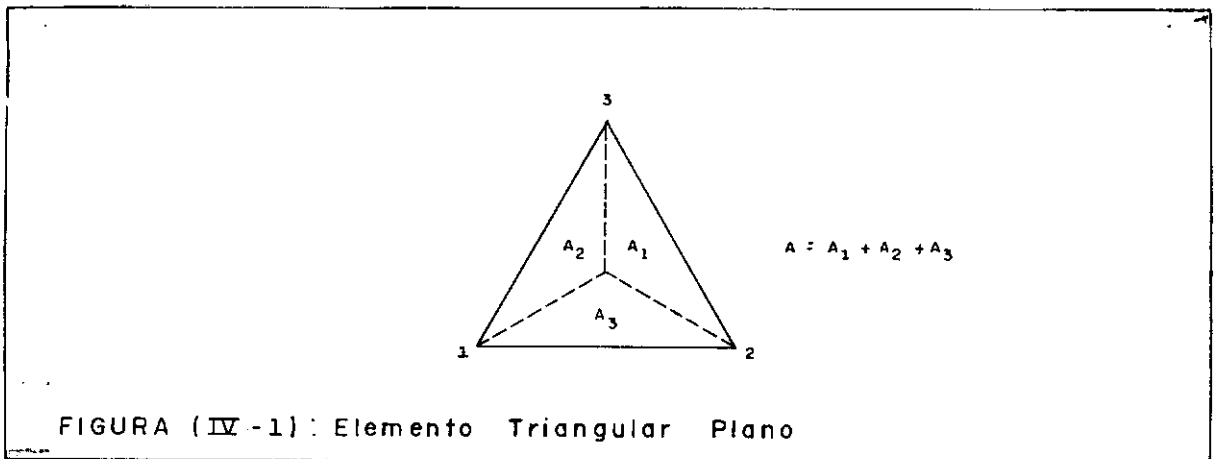
$$[N] = [\xi_1 \quad \xi_2 \quad \xi_3] \quad , \quad (IV-7)$$

onde os valores de ξ_k , $k = 1, 2, 3$, são as coordenadas triangulares (também conhecidas como coordenadas de área) do ponto onde desejamos determinar u e ∇u .

Estas coordenadas triangulares são definidas como

$$\xi_k = \frac{A_k}{A} \quad , \quad (k = 1, 2, 3), \quad (IV-8)$$

onde A e A_k são as áreas mostradas na figura (IV-1).



Assim definido o vetor $[N]$, e lembrando que

$$\nabla \omega = \frac{\partial \omega}{\partial n} \quad , \quad (IV-9)$$

podemos escrever os vetores $[H]_{ij}$ e $[G]_{ij}$ como

$$\left[\hat{H} \right]_{ij} = \int_{s_j} \left[\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{matrix} \right] \frac{\partial \omega}{\partial n} ds \quad (\text{IV-10})$$

$$\text{e} \quad \left[G \right]_{ij} = \int_{s_j} \omega \left[\begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{matrix} \right] ds \quad (\text{IV-11})$$

Como ω é função somente da distância r , ou seja ,

$$\omega = \frac{1}{4\pi r} \quad , \quad (\text{IV-12})$$

devemos representar o gradiente $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ como

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\partial \omega}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad , \quad (\text{IV-13})$$

a fim de simplificar os nossos cálculos.

Assim, temos que

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{-\cos(r, n)}{4\pi r^2} \quad , \quad (\text{IV-14})$$

onde $\cos(r, n)$ é o cosseno diretor das retas-suporte dos vetores \underline{r} e \underline{n} , sendo \underline{r} o vetor cujo ponto de aplicação é o ponto i onde o potencial unitário está aplicado e a extremidade é o ponto t onde esperamos determinar o valor da função ω ou da sua derivada $\frac{\partial \omega}{\partial n}$, e \underline{n} o vetor normal à superfície.

Portanto, se \underline{r} é o vetor representado na figura (IV-2), podemos expressá-lo, e a normal, como

$$\underline{r} = r_1 \underline{i} + r_2 \underline{j} + r_3 \underline{k} \quad (\text{IV-15})$$

$$\text{e} \quad \underline{n} = n_1 \underline{i} + n_2 \underline{j} + n_3 \underline{k} \quad (\text{IV-16})$$

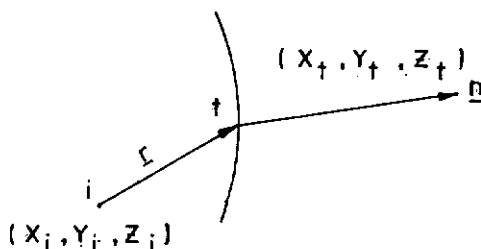


FIGURA (IV-2)

Desta representação vetorial, podemos indicar que

$$\cos (r, n) = \frac{\underline{r} \cdot \underline{n}}{r n} , \quad (\text{IV-17})$$

onde o numerador representa o produto escalar dos vetores \underline{r} e \underline{n} , ou seja,

$$\underline{r} \cdot \underline{n} = r_1 n_1 + r_2 n_2 + r_3 n_3 , \quad (\text{IV-18})$$

e o denominador representa o produto das normas destes vetores. Isto quer dizer que r e n escrevem-se agora como

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} \quad (\text{IV-19})$$

$$\text{e} \quad n = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2} \quad (\text{IV-20})$$

Determinemos, agora, os parâmetros r_1, r_2, r_3 , e n_1, n_2, n_3 que definem os vetores \underline{r} e \underline{n} , respectivamente. Os primeiros são facilmente identificados como

$$\begin{aligned} r_1 &= x_t - x_i , \\ r_2 &= y_t - y_i \quad \text{e} \\ r_3 &= z_t - z_i , \end{aligned} \quad (\text{IV-21})$$

ou seja, como as diferenças entre as coordenadas dos pontos i e t da figura (IV-2).

Para determinarmos os valores de n_1, n_2 e n_3 , suponhamos a superfície do elemento triangular como sendo equipotencial e convencionemos uma numeração dos seus nós feita, por exemplo, no sentido anti-horário, conforme a figura (IV-3). Assim sendo, a normal \underline{n} é ortogonal ao plano definido pelos três nós do elemento e pode ser definida como o produto vetorial de dois vetores quaisquer cujos suportes pertençam ao plano do elemento. Se considerarmos que estes dois vetores sejam representados por quaisquer dois lados do elemento triangular, como por exemplo os lados $\overline{12}$ e $\overline{13}$, e os

denominarmos por \underline{a} e \underline{b} , respectivamente, como na figura (IV-3), temos que

$$\underline{n} = \underline{a} \times \underline{b} \quad , \quad (\text{IV-22})$$

se queremos, por exemplo, que a normal seja dirigida para fora do domínio. Aqui, cabe observar que adotar uma convenção para numeração dos nós do elemento triangular (como fizemos, por exemplo, no sentido anti-horário) é uma decisão consequente no intuito de assegurarmos, para todos os elementos, o mesmo sentido da normal \underline{n} , isto é, para fora do domínio, no nosso caso.

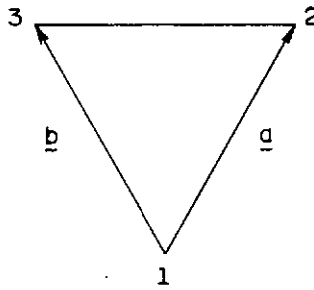


FIGURA (IV - 3)

Assim, os vetores \underline{a} e \underline{b} podem ser escritos como

$$\underline{a} = (x_2 - x_1) \underline{i} + (y_2 - y_1) \underline{j} + (z_2 - z_1) \underline{k} \quad (\text{IV-23})$$

$$\text{e } \underline{b} = (x_3 - x_1) \underline{i} + (y_3 - y_1) \underline{j} + (z_3 - z_1) \underline{k} \quad , \quad (\text{IV-24})$$

Onde (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) e (x_3, y_3, z_3) são as coordenadas dos nós do elemento.

Substituindo as expressões (IV-23) e (IV-24) na equação (IV-22), podemos escrever o vetor \underline{n} da maneira anteriormente sugerida, ou seja,

$$\underline{n} = n_1 \underline{i} + n_2 \underline{j} + n_3 \underline{k} \quad ,$$

com

$$n_1 = (y_2 - y_1) (z_3 - z_1) - (z_2 - z_1) (y_3 - y_1) \quad ,$$

$$n_2 = (z_2 - z_1) (x_3 - x_1) - (x_2 - x_1) (z_3 - z_1) \quad \text{e}$$

$$n_3 = (x_2 - x_1) (y_3 - y_1) - (y_2 - y_1) (x_3 - x_1) \quad . \quad (\text{IV-25})$$

Determinados, portanto, os valores de r_1, r_2, r_3 e n_1, n_2, n_3 , podemos calcular, através das expressões (IV-17) a (IV-20), o $\cos(r, n)$ e consequentemente o valor do gradiente $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ num ponto qualquer do domínio, pela expressão (IV-14). O gradiente, portanto, poderá ser expresso por

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{-(r_1 n_1 + r_2 n_2 + r_3 n_3)}{4\pi r^3 n}, \quad (\text{IV-26})$$

com r e n definidos em (IV-19) e (IV-20), respectivamente.

Assim, os vetores $\left[\hat{H}\right]_{ij}$ e $\left[G\right]_{ij}$, representados nas expressões (IV-10) e (IV-11) podem, agora, ser escritos como

$$\left[\hat{H}\right]_{ij} = - \int_{s_j} \left[\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3\right] \frac{(r_1 n_1 + r_2 n_2 + r_3 n_3)}{4\pi r^3 n} ds \quad (\text{IV-27})$$

$$\text{e} \quad \left[G\right]_{ij} = \int_{s_j} \left[\xi_1 \xi_2 \xi_3\right] \frac{1}{4\pi r} ds. \quad (\text{IV-28})$$

Ambos os vetores acima representados possuem três elementos que podem ser indicados na forma

$$\int_{s_j} \xi_k F ds,$$

onde $k = 1, 2$ ou 3 e

F é uma das funções ω ou $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ já definidas.

Para efetuarmos cada uma dessas integrais devemos recorrer, na maioria dos casos, a um processo qualquer de integração numérica, visto que, a sua solução exata é de difícil concepção, podendo ser facilmente determinada apenas nos casos particulares em que :

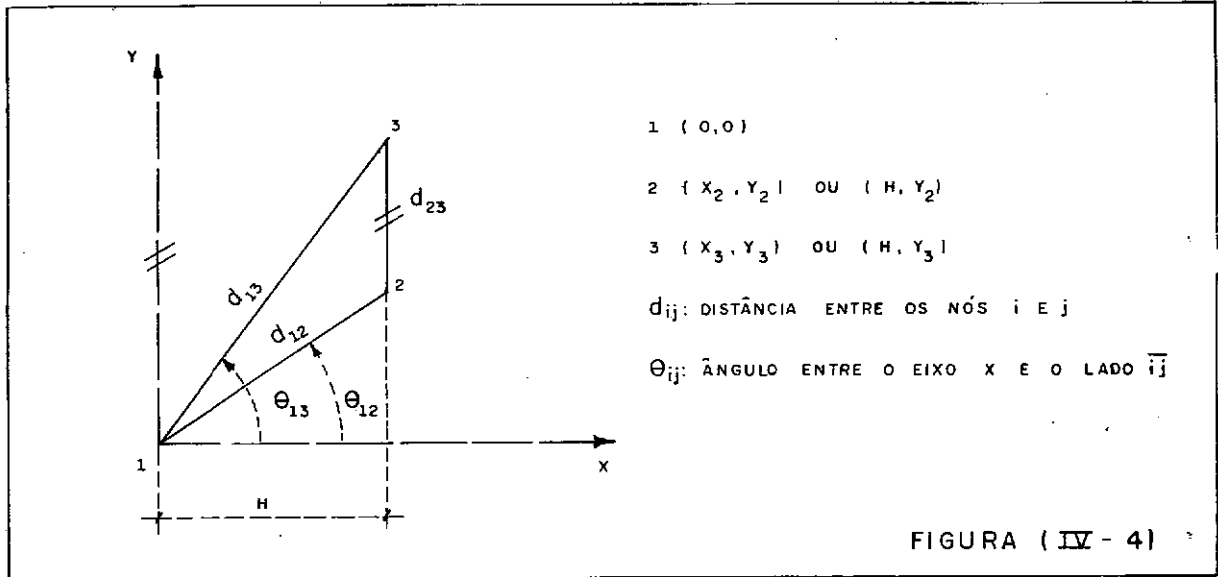
$$\text{a) } F = \frac{\partial \omega}{\partial n} \text{ e os vetores } \underline{r} \text{ e } \underline{n} \text{ são ortogonais,}$$

$$\text{b) } F = \omega \text{ e o potencial unitário se encontra a}$$

aplicado em um dos nós do elemento sobre o qual se efetua a integração.

No primeiro caso, a função F é nula, visto que, se \underline{r} e \underline{n} são ortogonais, o cosseno diretor das suas retas-suporte é igualmente nulo. Isto acarretaria na nulidade também da referida integral.

No segundo caso, se supomos, por exemplo, que o potencial unitário está aplicado no ponto 1 do elemento triangular, e estabelecemos um sistema local de eixos cartesianos com origem neste ponto e com o eixo y paralelo ao lado $\overline{23}$, poderemos, baseados no que indica a figura (IV-4), escrever as seguintes relações para ξ_1, ξ_2 e ξ_3 :



$$\xi_1 = \frac{H-x}{H} \quad , \quad (IV-29)$$

$$\xi_2 = \frac{\frac{y_3}{x_3} x - y}{y_3 - y_2} \quad (IV-30)$$

e

$$\xi_3 = \frac{\frac{y_2}{x_2} x - y}{y_2 - y_3}$$

onde H é a altura do elemento triangular relativa ao lado $\overline{23}$.

Se representarmos tais funções ξ_k em coordenadas polares, ou seja, com

$$x = r \cos \theta \quad (\text{IV-32})$$

$$e \quad y = r \sin \theta \quad , \quad (\text{IV-33})$$

e considerando que

$$\frac{y_2}{x_2} = \operatorname{tg} \theta_{12} \quad , \quad (\text{IV-34})$$

$$\frac{y_3}{x_3} = \operatorname{tg} \theta_{13} \quad , \quad (\text{IV-35})$$

$$e \quad y_3 - y_2 = d_{23} \quad , \quad (\text{IV-36})$$

$$\text{as funções} \quad f_k = \frac{\xi_k}{\omega} \quad , \quad (\text{IV-37})$$

a serem integradas, poderão escrever-se como

$$f_1 = \frac{H - r \cos \theta}{4\pi r H} \quad , \quad (\text{IV-38})$$

$$f_2 = \frac{\operatorname{tg} \theta_{13} \cos \theta - \sin \theta}{4\pi d_{23}} \quad (\text{IV-39})$$

$$e \quad f_3 = \frac{-(\operatorname{tg} \theta_{12} \cos \theta - \sin \theta)}{4\pi d_{23}} \quad . \quad (\text{IV-40})$$

As integrais $I_k = \int_{S_j} f_k \, dx \, dy$ apresentar-se-ão como

$$I_k = \int_r \int_\theta f_k r \, dr \, d\theta \quad , \quad (\text{IV-41})$$

visto que

$$dx \, dy = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr \, d\theta = r dr \, d\theta \quad . \quad (\text{IV-42})$$

Assim sendo, teremos para a primeira integral :

$$I_1 = \frac{1}{4\pi H} \int_r \int_\theta (H - r \cos\theta) dr d\theta. \quad (\text{IV-43})$$

Integrando em r, a reduzimos à expressão

$$I_1 = \frac{1}{4\pi H} \int_\theta \left(rH - \frac{r^2}{2} \cos\theta \right) \Big|_0^r d\theta \quad (\text{IV-44})$$

Por simples observação da figura (IV-4), verificamos que r pode ser representado em função de θ , como

$$r = \frac{H}{\cos\theta}. \quad (\text{IV-45})$$

Substituindo tal expressão na integral (IV-44) , temos, após efetuadas as devidas simplificações,

$$I_1 = \frac{H}{8\pi} \int_{\theta_{12}}^{\theta_{13}} \sec\theta d\theta, \quad (\text{IV-46})$$

ou ainda,

$$I_1 = \frac{H}{8\pi} \ln \frac{\sec\theta_{13} + \operatorname{tg}\theta_{13}}{\sec\theta_{12} + \operatorname{tg}\theta_{12}} \quad (\text{IV-47})$$

Com raciocínio análogo, determinamos

$$I_2 = \frac{H^2}{8\pi d_{23}} \left[\operatorname{tg}\theta_{13} \ln \frac{\sec\theta_{13} + \operatorname{tg}\theta_{13}}{\sec\theta_{12} + \operatorname{tg}\theta_{12}} + (\sec\theta_{12} - \sec\theta_{13}) \right] \quad (\text{IV-48})$$

$$\text{e } I_3 = \frac{-H^2}{8\pi d_{23}} \left[\operatorname{tg}\theta_{12} \ln \frac{\sec\theta_{13} + \operatorname{tg}\theta_{13}}{\sec\theta_{12} + \operatorname{tg}\theta_{12}} + (\sec\theta_{12} - \sec\theta_{13}) \right] \quad (\text{IV-49})$$

Observando mais uma vez a figura (IV-4), verificamos que

$$\cos\theta_{ij} = \frac{H}{d_{ij}}, \quad (\text{IV-50})$$

o que implica, naturalmente, em

$$\operatorname{tg} \theta_{ij} = \frac{\sqrt{d_{ij}^2 - H^2}}{H} \quad (\text{IV-51})$$

$$\text{e} \quad \sec \theta_{ij} = \frac{d_{ij}}{H} \quad (\text{IV-52})$$

De posse dessas últimas relações expressas, podemos finalmente indicar que

$$I_1 = \frac{H}{8\pi} \ln \frac{d_{13} + \sqrt{d_{13}^2 - H^2}}{d_{12} + \sqrt{d_{12}^2 - H^2}}, \quad (\text{IV-53})$$

$$I_2 = \frac{H}{8\pi d_{23}} \left[\sqrt{d_{13}^2 - H^2} \ln \frac{d_{13} + \sqrt{d_{13}^2 - H^2}}{d_{12} + \sqrt{d_{12}^2 - H^2}} + (d_{12} - d_{13}) \right] \quad (\text{IV-54})$$

$$\text{e} \quad I_3 = \frac{-H}{8\pi d_{23}} \left[\sqrt{d_{12}^2 - H^2} \ln \frac{d_{13} + \sqrt{d_{13}^2 - H^2}}{d_{12} + \sqrt{d_{12}^2 - H^2}} + (d_{12} - d_{13}) \right]. \quad (\text{IV-55})$$

Desta maneira, teremos resolvidas exatamente, as integrais

$$\int_{s_j} \frac{\xi_k}{4\pi r} ds,$$

para quando o potencial unitário está aplicado em um dos nós do elemento triangular sobre o qual se processa a integração, em função apenas dos comprimentos dos lados do elemento e da sua altura em relação ao lado oposto ao nó onde o potencial está aplicado e, com isto, já determinados os termos de alguns dos vetores $[G]_{ij}$.

Contudo, como dissemos anteriormente, a maioria das integrais serão solucionadas numericamente por não apresentarem simplicidade semelhante a dos dois casos particulares abordados. Como primeiro passo para a concepção desta solução numérica para as integrais, devemos estabelecer sobre o elemento triangular, pontos de integração distintamente po

sicionados, em cada qual possamos determinar o valor da função a ser integrada. Feito isto, a solução de cada uma das integrais pode se apresentar como

$$\int_{S_j} \xi_k F ds = \sum_{p=1}^t \left[\xi_k F \right]_p W_p S_j \quad (\text{IV-56})$$

onde t é o número de pontos de integração

$\left[\xi_k F \right]_p$ é o valor da função a ser integrada, no ponto p ,

S_j é a área do elemento triangular sobre a qual efetuamos a integração e

W_p é uma constante-peso que determina o percentual da área S_j sobre o qual o ponto p exerce influência.

Por fim, resolvendo cada uma das integrais como indicado na expressão (IV-56), teremos calculados os elementos dos demais vetores $\left[\hat{H} \right]_{ij}$ e $\left[G \right]_{ij}$ que se apresentarão, cada um deles, respectivamente, nas formas

$$- \frac{S_j}{4\pi n} \sum_{p=1}^t \left[\frac{\xi_k (r_1 n_1 + r_2 n_2 + r_3 n_3)}{r^3} \right]_p W_p \quad e$$

$$\frac{S_j}{4\pi} \sum_{p=1}^t \left[\frac{\xi_k}{r} \right]_p W_p .$$

Porém, se a área de um paralelogramo pode ser definida como a norma do produto vetorial de dois vetores representados por dois de seus lados não-paralelos, conforme figura (IV-5), o valor da área da superfície triangular S_j pode ser determinada por

$$S_j = \frac{n}{2} , \quad (\text{IV-57})$$

e os termos de $\left[\hat{H} \right]_{ij}$ e $\left[G \right]_{ij}$ podem ser expressos, respectivamente, por

$$\frac{-1}{8\pi} \sum_{p=1}^t \left[\frac{\xi_k (r_1 n_1 + r_2 n_2 + r_3 n_3)}{r^3} \right]_p w_p \text{ e}$$

$$\frac{n}{8\pi} \sum_{p=1}^t \left[\frac{\xi_k}{r} \right]_p w_p .$$

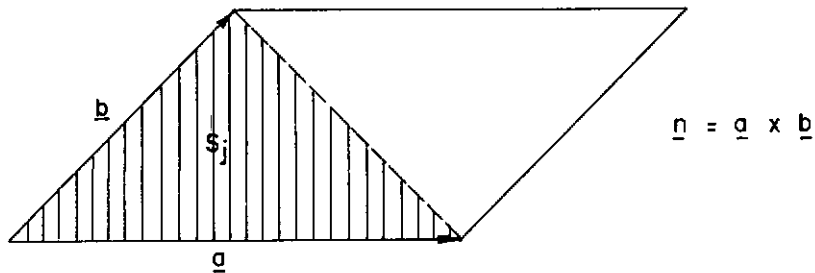


FIGURA (IV - 5)

A primeira destas expressões pode ainda ser simplificada, para efeito de cálculo, se fizermos as seguintes considerações :

a) em primeiro lugar, lembremos que r_1 , r_2 e r_3 podem ser expressos pelas equações (IV-21), onde (x_t, y_t, z_t) representa as coordenadas dos pontos de integração e (x_i, y_i, z_i) as coordenadas do ponto i de aplicação do potencial unitário;

b) em seguida, lembremos também, que os valores n_1, n_2 e n_3 , definidos nas expressões (IV-25), são idênticos aos parâmetros A , B e C , respectivamente, da equação

$$Ax + By + Cz + D = 0 , \quad (\text{IV-58})$$

do plano definido pelos nós do elemento triangular, com

$$D = - Ax_1 - By_1 - Cz_1 . \quad (\text{IV-59})$$

Assim sendo, a somatória $r_1 n_1 + r_2 n_2 + r_3 n_3$ pode escrever-se como

$$A (x_t - x_i) + B (y_t - y_i) + C (z_t - z_i) .$$

Se, a esta mesma somatória, adicionarmos e sub

traímos a constante D, ao mesmo tempo em que a multiplicamos e dividimos pela norma n do vetor normal, teremos a expressão

$$\left(\frac{Ax_t + By_t + Cz_t + D}{n} - \frac{Ax_i + By_i + Cz_i + D}{n} \right) n$$

Ora, se sabemos que a distância de um ponto (x', y', z') a um plano $Ax + By + Cz + D = 0$ é representada por

$$d = \frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (\text{IV-60})$$

verificamos que a última expressão sugerida representa-se por

$$(d_t - d_i) n,$$

onde d_t e d_i são, respectivamente, as distâncias dos pontos t e i ao plano definido pelos nós do elemento triangular.

Como os pontos t de integração pertencem ao referido plano, óbvio se torna que

$$d_t = 0, \quad (\text{IV-61})$$

e a expressão representativa dos termos do vetor $\left[\hat{H} \right]_{ij}$ torna-se, finalmente

$$\frac{Ax_i + By_i + Cz_i + D}{8\pi} \sum_{p=1}^t \left[\frac{\xi_k}{r^3} \right]_p w_p.$$

O Processo de Integração Numérica⁵ :

O número de pontos de integração e a sua localização sobre o elemento não devem ser, no entanto, arbitrários, e sim, escolhidos de maneira a conseguirmos melhores resultados com um mínimo de esforço de cálculo. Muitos matemáticos têm apresentado sugestões para a escolha desses pontos

de integração sobre diversos tipos de formas geométricas, porém, de modo geral, para funções polinomiais dos mais diversos graus. Como sabemos, nossas funções não são deste tipo e, portanto, teremos relativa dificuldade de obtermos bons resultados com a maioria dos métodos clássicos estudados e sugeridos pelos matemáticos. Se observarmos, porém, as funções a serem calculadas nos diversos pontos de integração para a composição dos termos dos vetores $[\tilde{H}]_{ij}$ e $[G]_{ij}$, ou seja,

$$\frac{\xi_k}{r^3} \text{ e } \frac{\xi_k}{r},$$

respectivamente, iremos concluir que os resultados porventura obtidos pelos processos de integração numérica sugeridos para integrar exatamente funções polinomiais somente teriam aproximação demasiadamente grosseira no caso em que desejamos efetuar a integração sobre os elementos que circundam o ponto de aplicação do potencial unitário e ainda com ξ_k referido a este ponto. Isto torna-se simples de entender se concebermos as funções

$$\frac{\xi_k}{r^3} \text{ e } \frac{\xi_k}{r}$$

como o produto das funções ξ_k , representadas na figura (IV-6), pelas funções

$$\frac{1}{r^3} \text{ e } \frac{1}{r},$$

respectivamente, representadas na figura (IV-7). Daí, teremos que, nos elementos que circundam o ponto de aplicação do potencial unitário as funções

$$\frac{\xi_k}{r^3} \text{ e } \frac{\xi_k}{r},$$

com ξ_k relativo a tal ponto, tendem ao infinito quando dele se aproximam. Neste caso, portanto, a função a ser integrada tem uma configuração que muito se distancia das formas comuns às funções polinomiais, sendo desaconselhável a utilização dos processos acima citados.

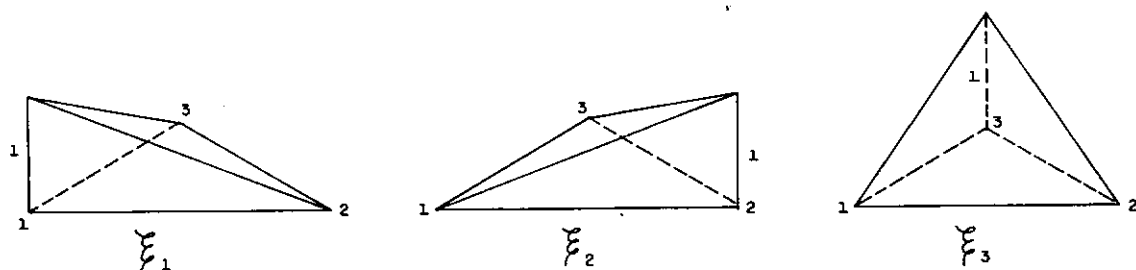


FIGURA (IV - 6) : FUNÇÕES ξ_k

Porém, nós já sabemos que aí os termos de $\left[\tilde{H} \right]_{ij}$ são nulos e que os termos de $\left[G \right]_{ij}$ são determinados inteiramente exatamente as funções $\frac{\xi_k}{r}$.

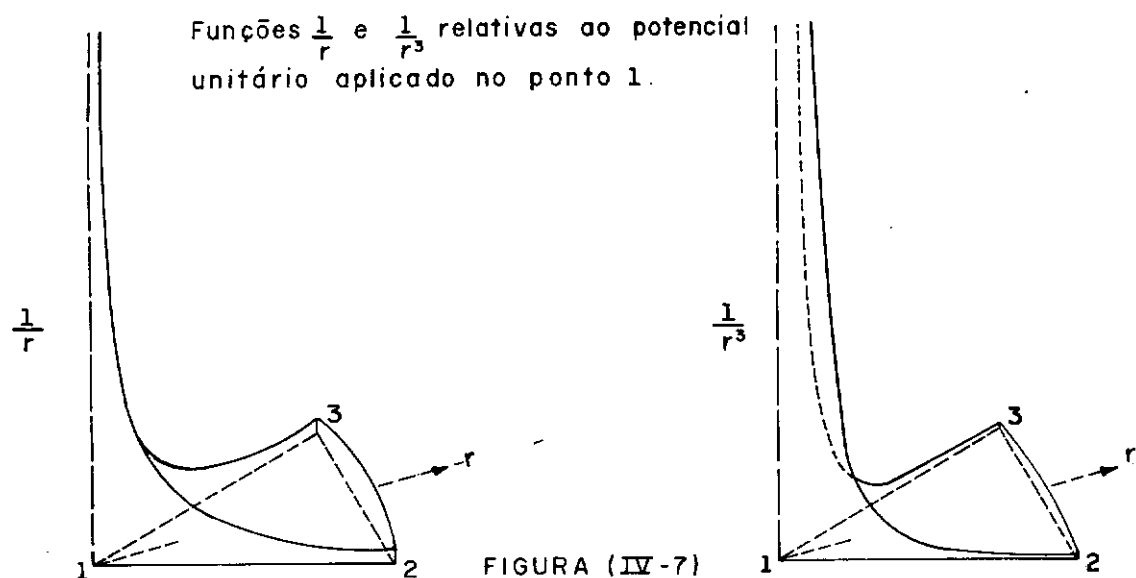


FIGURA (IV-7)

Nos demais casos em que a função a ser integrada não tende para o infinito em nenhum dos pontos do elemento sobre o qual efetuamos a integração, estes conhecidos processos que integram com exatidão funções polinomiais, podem ser usados, e com eles podemos conseguir resultados com aproximação relativamente satisfatória. No nosso estudo recorreremos ao processo sugerido por Hammer, Marlove e Stroud⁵ para integração exata de funções polinomiais do sexto grau com 12 pontos de integração simetricamente distribuídos sobre a região triangular.

As constantes-peso e as coordenadas de área utilizadas neste processo são apresentadas na Tabela (IV-1).

T A B E L A (IV-1)

W_p	ξ_1	ξ_2	ξ_3	MULTIPLICIDADE
0.050844906370207	0.873821971016996	0.063089014491502	0.063089014491502	3
0.116786275726379	0.501426509658179	0.249286745170910	0.249286745170910	3
0.082851075618374	0.636502499121399	0.310352451033785	0.053145049844816	6

A multiplicidade indica o número de permutações que devem ser feitas com os ξ_k (conservando o W_p) para estabelecermos outros pontos. Portanto, teremos com cada um dos primeiro e segundo grupo, três pontos de integração e com o terceiro grupo, seis pontos, totalizando os 12 anteriormente referidos. Como era de se esperar a somatória dos valores de W_p é igual a unidade o mesmo acontecendo com a somatória dos ξ_k de um mesmo ponto de integração.

Com estes valores acima estabelecidos, procederemos às integrações numéricas conforme mostra a equação (IV-56) e as relações posteriores do item anterior, concluindo, assim, a determinação dos termos dos vetores $\left[\hat{H}\right]_{ij}$ e $\left[G\right]_{ij}$.

O fato de recorrermos a integrações numéricas torna-se, sem dúvida, um fator determinante na não completa exatidão dos resultados.

Determinação dos termos B_i :

No capítulo precedente, fizemos alusão ao cálculo dos termos B_i definidos como

$$B_i = \int_V p \omega dV. \quad (IV-62)$$

Como podemos observar, tais termos procedem da solução de uma integral sobre todo o domínio V e, para não fugirmos à principal característica do Método dos Elementos de Contorno, qual seja, a de trabalharmos apenas sobre o contorno do domínio, devemos reduzi-la em uma dimensão. Para tanto, sugerimos, anteriormente, uma transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas esféricas que nos levou, após algumas operações, ao valor

$$B_i = \frac{p}{8\pi} \int_{\theta, \varphi} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi, \quad (\text{IV-63})$$

com p constante e, r , θ e φ mostrados na figura (III-1).

A partir da expressão (IV-63), é possível sugerir uma formulação para efetuar numericamente a integral acima apenas sobre o contorno, recorrendo, como na determinação dos termos das matrizes \underline{G} e \underline{H} a uma somatória dos resultados de tal integral sobre os diferentes elementos triangulares da discretização original do contorno. Esta formulação, no entanto, se mostra bastante trabalhosa, o que nos obriga a sugerir uma nova forma, mais simples e que apresenta resultados idênticos, para a solução de tal problema. Esta nova abordagem consiste também em considerar a solução da integral como uma somatória da forma

$$B_i = \sum_{j=1}^m \int_{V_j} p \, dV, \quad (\text{IV-64})$$

onde m é o número de elementos tetraédricos determinados pela ligação, por segmentos de retas, dos nós dos elementos triangulares ao ponto i onde o potencial unitário está aplicado,

em que

$$\int_{V_j} p \, dV = \sum_{k=1}^t (p_w)_k W_k V_j, \quad (\text{IV-65})$$

onde t é o número de pontos de integração,

$(p_w)_k$ é o valor da função a ser integrada, no ponto K ,

- V_j é o volume da pirâmide representada na figura (IV-8), onde i é o ponto de aplicação do potencial unitário, e
- W_k é uma constante-peso que representa o percentual do volume V_j sobre o qual o ponto k exerce influência.

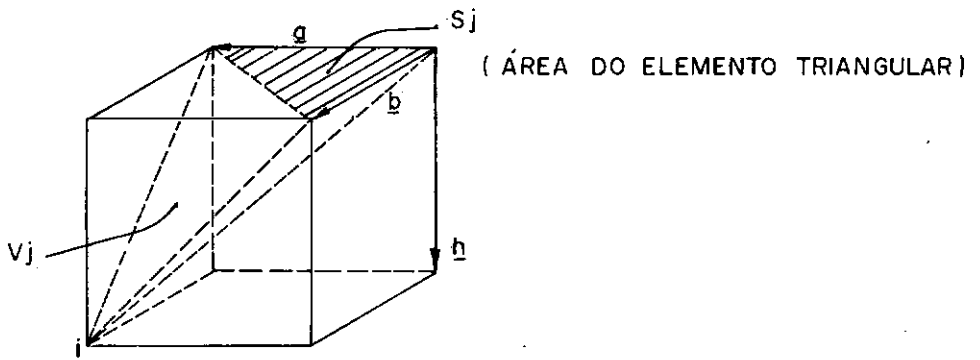


FIGURA (IV-8)

Observando ainda a figura (IV-8), podemos indicar o volume V_j pela expressão

$$V_j = \frac{1}{6} (\underline{a} \times \underline{b} \cdot \underline{h}) , \quad (\text{IV-66})$$

ou

$$V_j = \frac{1}{6} (\underline{n} \cdot \underline{h}) , \quad (\text{IV-67})$$

que significa um sexto do produto escalar entre a normal e o vetor \underline{h} cuja norma representa a altura do prisma (ou da pirâmide) da figura (IV-8). Resolvendo tal produto escalar, concluímos que

$$V_j = \frac{-1}{6} n h , \quad (\text{IV-68})$$

onde n é a norma já conhecida do vetor \underline{n} e h é a distância do ponto i ao plano definido pelos nós do elemento triangular.

O valor de n , portanto, pode ser expresso por

$$n = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} , \quad (\text{IV-69})$$

e o valor de h por

$$h = \frac{Ax_i + By_i + Cz_i + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad , \quad (\text{IV-70})$$

onde A, B, C e D são os parâmetros da equação do plano do elemento.

Substituindo as equações (IV-69) e (IV-70) na equação (IV-68), chegamos ao valor

$$V_j = \frac{-1}{6} (Ax_i + By_i + Cz_i + D) \quad , \quad (\text{IV-71})$$

para o volume da pirâmide indicada na figura (IV-8).

Observemos, porém, que, da expressão (IV-68), podemos concluir que tal volume pode ser escrito como

$$V_j = \frac{-h}{3} S_j \quad , \quad (\text{IV-72})$$

o que caracteriza a nossa tentativa de levar a integral

$$\int_{V_j} p \omega dV$$

ao contorno do domínio.

Se considerarmos agora, que os pontos de integração k estão distribuídos sobre a superfície do elemento triangular de área S_j , as constantes-peso W_k passam a representar o percentual de área sobre os quais os pontos k exercem influência, como acontecia anteriormente em relação às constantes W_p definidas no primeiro item do presente capítulo.

Assim, a expressão (IV-65) que representa a solução das integrais que definem os termos B_i pode ser finalmente escrita como

$$\int_{V_j} p \omega dV = \frac{-p (Ax_i + By_i + Cz_i + D)}{24\pi} \sum_{k=1}^t \frac{W_k}{r_k} \quad , \quad (\text{IV-73})$$

lembrando que

$$\omega = \frac{1}{4\pi r} \quad , \quad (\text{IV-74})$$

p é uma constante e V_j é o volume representado na equação (IV-71).

Substituindo a equação (IV-73) na equação (IV-64), teremos, finalmente, os termos B_i calculados por

$$B_i = \frac{-p}{24\pi} \sum_{j=1}^m (Ax_i + By_i + Cz_i + D) \sum_{k=1}^t \frac{w_k}{r_k} \quad , \quad (\text{IV-75})$$

sendo, como vimos, m e t , o número de elementos e o número de pontos de integração, respectivamente.

A partir das considerações já feitas neste capítulo podemos, enfim, montar o sistema de equações lineares

$$\underline{H} \underline{U} = \underline{G} \underline{Q} + \underline{B} \quad (\text{IV-76})$$

e, conseqüentemente, o sistema reordenado

$$\underline{A} \underline{X} = \underline{F} \quad , \quad (\text{IV-77})$$

cujas soluções, como vimos no capítulo anterior, é o objetivo principal do nosso estudo.

Entretanto, mais um detalhe exige a nossa atenção na formulação definitiva das aplicações do Método dos Elementos de Contorno. Tal detalhe diz respeito à introdução das condições de contorno na referida formulação, e resume-se no fato de que em determinados pontos da discretização do contorno, ou seja, em determinados nós, podemos conhecer, ou precisar indicar, mais de uma condição de contorno. Para tanto, recorreremos à solução mais trivial que seria a de introduzir mais de um nó num mesmo ponto da discretização. A discussão deste detalhe é o objeto do item a seguir.

O Conceito dos Nós Múltiplos ^{6,7}

Como exposto no desenvolvimento do método estudado

do no presente trabalho, a cada nó oriundo da discretização do contorno em elementos, corresponde uma linha e uma coluna dos sistemas (IV-76) e (IV-77), indicados acima. Vimos também que o modelo exige que conheçamos em cada um destes nós o valor do potencial ou do gradiente (que será introduzido como condição de contorno), a fim de calcularmos o outro e termos, desta forma, conhecidas as variações de ambos em todo o contorno e, posteriormente, em todo o domínio. Este fato leva-nos a um problema fundamental na concepção da formulação até aqui sugerida. Tal problema é materializado na medida que, num mesmo nó, possuímos mais de um valor para o gradiente. Isto é perfeitamente possível pois, sendo o gradiente uma grandeza vetorial, poderão surgir, num mesmo ponto, mais de um valor para esta grandeza, se supomos que tal ponto pertence a uma região de descontinuidade geométrica. Isto é, se o contorno se apresenta, em alguma parte, na forma como, por exemplo, ilustra a figura (IV-9), no ponto *i*, como em qualquer outro ponto em que haja uma acentuada descontinuidade geométrica, aparecerão, como indicado na mesma figura, gradientes em mais de uma direção. Tal problema nos leva, portanto, a adotar, previamente, a solução que parece mais lógica, qual seja, a de introduzir, num mesmo ponto, tantos nós quantos necessários (todos de mesmas coordenadas, naturalmente), a fim de representarmos com maior exatidão o problema especificamente estudado. A estes nós denominaremos "nós múltiplos". Cada um destes nós pertenceriam, assim a diferentes elementos. No exemplo da figura (IV-9), introduziríamos tres nós que pertenceriam, cada um deles, a somente um dos planos que concorrem no ponto *i*.

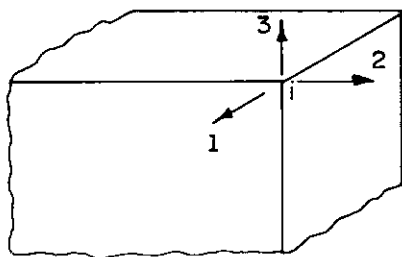


FIGURA (IV - 9)

Este mesmo problema não ocorre, porém, em relação ao potencial, que tem valor único num determinado ponto por ser uma grandeza escalar, a menos que admitamos descon_{tinuidade} na função que o representa na superfície de contor_{no}, o que não faremos em nosso estudo.

Surge, a partir de tais considerações, nosso ma_{is} grave problema. Vimos, anteriormente, que a matriz \tilde{A} do sistema de equações (IV-77) é composta de colunas das ma_{trizes} \tilde{G} e \tilde{H} do sistema (IV-76), conforme seja previamente co_{nhecido}, em cada nó, o potencial ou o gradiente, respectiva_{mente}. Se dois ou mais nós têm as mesmas coordenadas, suas linhas correspondentes na matriz \tilde{G} serão idênticas, o mesmo não sendo regra em relação à matriz \tilde{H} , visto que, os termos da diagonal de \tilde{H} são acrescidos da constante c_i , ou seja,

$$h_{ii} = c_i + \hat{h}_{ii}. \quad (\text{IV-78})$$

Desta forma, se prescrevemos o potencial em mais de um nó com coordenadas idênticas, a matriz \tilde{A} torna-se sin_{gular}, impossibilitando-nos de resolver o sistema (IV-77) e atingirmos assim o nosso objetivo. Este fato se constitui na mais grave limitação do nosso estudo pois se tivermos, por exemplo, um nó duplo num determinado ponto onde deseja_{mos} calcular os gradientes em ambas as direções, seremos o_{brigados} a introduzir, neste ponto, um nó simples, o que nos conduzirá a um resultado com uma aproximação relativamente grosseira. Tal questão requer mais tempo de estudo e não é discutida no presente trabalho. O caso análogo, para pro_{blemas} de elasticidade linear bidimensional já é satisfatô_{riamente} solucionado⁸. Todavia, se num nó múltiplo, deseja_{mos} determinar o gradiente em apenas uma direção, nosso in_{tento} torna-se possível sem maiores problemas. No nó corres_{pondente} à direção do gradiente desconhecido será prescrito, naturalmente, o potencial e nos demais serão prescritos os gradientes correspondentes. Entretanto, como os potenciais, que esperamos determinar nos nós onde são prescritos os gra_{dientes}, são já previamente conhecidos e idênticos ao poten_{cial} prescrito no nó de gradiente desconhecido, podemos di

minuir a ordem da matriz \tilde{A} , somando as colunas de \tilde{H} correspondentes ao nó múltiplo e substituindo as respectivas linhas (e o elemento correspondente do vetor \tilde{F}) por "equações suplementares" do tipo

$$u_j = u_i \quad (\text{IV-79})$$

onde u_j representa o potencial incógnito nos nós de mesmas coordenadas e

u_i representa o potencial prescrito no nó correspondente à direção do gradiente incógnito.

Esta última abordagem faz reduzir consideravelmente o trabalho de solução do sistema de equações (IV-77) e é utilizada de maneira análoga quando temos o potencial incógnito em todos os nós que compõem o nó múltiplo. Desta feita, contudo, temos de calcular o potencial em um dos nós e recorrermos às equações suplementares a fim de também determiná-lo nos outros. Cabe observar, finalmente, que se os gradientes prescritos em duas ou mais direções num mesmo ponto da discretização, forem equivalentes, ou seja, de mesmo valor não há necessidade de introduzirmos nós múltiplos pois existe apenas uma incógnita que é o potencial no referido ponto.

Em resumo, as condições de contorno num nó múltiplo devem ser introduzidas da seguinte maneira :

a) se temos para incógnita no nó, o gradiente em mais de uma direção, não introduzimos nó múltiplo e teremos, inevitavelmente, um resultado com aproximação pouco aceitável;

b) se temos para incógnita, o gradiente no máximo em uma direção, introduzimos o nó múltiplo associado às equações suplementares e conseguiremos resultados bastante satisfatórios.

Finalmente, agora, após estudados e discutidos os itens acima, passamos à concepção de um programa automático para computadores que desenvolva de forma sistemática

a solução dos problemas de campo em domínio tridimensional e representados pela citada equação de Poisson, pelo Método dos Elementos de Contorno.

CAPÍTULO V

ALGUNS TÓPICOS DO PROGRAMA PARA COMPUTADORES

Muito embora envolvendo as limitações citadas no desenvolvimento do nosso estudo, idealizamos um programa automático para computadores B - 6700, em linguagem FORTRAN, apresentando, a seguir, um breve resumo da sua estrutura.

O programa apresenta uma divisão de atividades em subrotinas principais e secundárias, ficando o programa principal incumbido, quase que exclusivamente, das chamadas das subrotinas principais.

Em primeiro lugar, são lidos e impressos os dados necessários à completa e perfeita execução do programa, na subrotina DADOS. Tal subrotina procede estas leituras e impressões na seguinte ordem :

- a) coordenadas dos nós no contorno;
- b) conectividade ou incidência dos elementos;
- c) condições de contorno nos nós do contorno;
- d) coordenadas dos nós no interior do domínio.

As coordenadas dos nós (no contorno e no interior do domínio) podem ser dos tipos cartesianas, cilíndricas ou esféricas, sendo que, nos dois últimos casos, os ângulos podem ser dados em graus ou radianos. Para proceder a leitura e impressão destas coordenadas, a subrotina principal DADOS recorre a uma outra secundária de denominação COORD. A conectividade de cada elemento e a condição de contorno de cada nó, por sua vez, são lidos e impressos na própria subrotina DADOS sendo, porém, impressa, juntamente com a conectividade, a área de cada elemento que também é determinada com o auxílio de uma subrotina secundária chamada AREAS. Cada condição de contorno deve ser especificada pela denominação "POTENCIAL" ou "DERIVADA" que indicam, respectivamente, se é prescrito, num determinado nó, o potencial ou o gradiente. Além dos dados do programa, outros valores necessários à sua execução são

lidos através dessa subrotina DADOS, por intermédio da subrotina secundária PESOS. Trata-se das coordenadas triangulares e das constantes-peso dos pontos de integração, inerentes, como vimos, ao processo de integração numérica que consta na formulação do método estudado.

Em seguida ao processamento da subrotina DADOS, o programa parte para a determinação dos elementos das matrizes \tilde{G} e \tilde{H} e do vetor \tilde{B} do sistema de equações (IV-76) e, logo após, dos elementos da matriz \tilde{A} e do vetor \tilde{F} do sistema (IV-77), através da subrotina FMATR. Como vimos, a determinação de tais elementos requer a execução de integrações exatas e numéricas, e, para tanto, o programa recorre às subrotinas secundárias INTEX e INTEG, respectivamente.

Após montado o sistema (IV-77), o mesmo é solucionado pelo método da triangularização de Gauss, fornecendo, tal solução, os valores dos potenciais e dos gradientes incógnitos dos nós do contorno. Esta etapa do programa se desenvolve na subrotina GAUSS que, após determinar as incógnitas do problema, ainda ordena os potenciais (lidos e calculados) e os gradientes (lidos e calculados), cada um dos dois grupos em vetores distintos.

Quando são requeridos valores do potencial em pontos situados no interior do domínio, o programa executa ainda a subrotina INTER que determina, também com o auxílio da subrotina INTEG, as matrizes retangulares \tilde{G} e \tilde{H} , e o vetor \tilde{B} , do sistema de equações (III-51), e, conseqüentemente, o vetor \tilde{U}_p que armazena os potenciais pretendidos.

Finalmente, os resultados finais do programa, ou seja, os potenciais e os gradientes (derivadas) dados e calculados no contorno e os potenciais calculados no interior do domínio, são impressos através da subrotina SAIDA.

Além das já citadas subrotinas, o programa se utiliza ainda de uma subrotina de caráter auxiliar denominada INDIC que se presta apenas à determinação dos elementos

de um vetor que armazena os índices das linhas de \tilde{G} ou \tilde{H} numa ordem tal que, inicialmente constem aquelas a serem consideradas na solução do sistema (IV-77) e, posteriormente, as não consideradas. Para entendermos com maior clareza o objetivo de tal subrotina, basta lembrarmos que em cada nó múltiplo , somente necessitamos considerar, para a solução do referido sistema de equações, um dos nós que o compõe, o que implica em desprezarmos os demais e,consequentemente , as linhas e colunas correspondentes na matriz \tilde{A} .

O programa emite, eventualmente, algumas mensagens no intuito de orientar o usuário caso ele cometa algum engano ou omissão na preparação dos dados, ou mesmo, para indicar alguma particularidade do exemplo estudado. Tais mensagens não englobam, todavia, todas as possíveis causas de erro e têm, na verdade, objetivo de apenas esclarecer o usuário em alguns pontos, visto que o próprio computador já tem a propriedade particular de emissão de mensagens esclarecedoras durante ou imediatamente após a execução de qualquer programa. As referidas mensagens emitidas pelo nosso programa, indicam erro no tipo de coordenadas, na unidade dos ângulos ou nas condições de contorno sugeridas como, também, um possível erro na conetividade de um determinado elemento que torne a sua área nula. Além desses erros, o programa indica, ainda , quando existe uma singularidade na matriz \tilde{A} e quando o cálculo do potencial em nós internos ao domínio não é solicitado . À exceção deste último caso, o programa é automaticamente encerrado após a emissão da mensagem.

As limitações de ordem técnica do programa, restringem-se praticamente às dimensões dos vetores e matrizes , que podem ser alteradas até os limites da máquina utilizada (no nosso caso, o computador B-6700), para a linguagem FORTRAN sem promover quaisquer modificações de carater estrutural no programa. No caso da linguagem FORTRAN do B-6700, os vetores e matrizes podem armazenar pouco mais de 65000 elementos o que nos levaria a um valor demasiadamente pequeno para o máximo número de nós no contorno. Como as maiores matrizes calculadas e usadas no programa são de ordem $n \times n$, sendo n o

número de nós no contorno, teríamos que limitar este número em aproximadamente 255. Sendo este valor, como já dissemos, muito pequeno, tendo em vista as aplicações práticas que poderiam requerer a utilização do programa, acatamos, na idealização do mesmo, o recurso de utilização da memória auxiliar, trabalhando separadamente com blocos das matrizes, formados por algumas linhas e todas as colunas, que são gravados em disco. Com isto ampliamos satisfatoriamente a capacidade do programa, embora o torne menos econômico quando o número de nós no contorno ultrapassa o referido limite de 255. Numa outra linguagem, mais poderosa, porém, menos usual, este problema seria praticamente eliminado.

O manual de utilização do programa desenvolvido, assim como uma listagem do mesmo, são apresentados em Apêndice, no objetivo de prestar maiores esclarecimentos sobre o mesmo, fornecendo, assim, uma orientação mais precisa ao usuário.

A fim de podermos discutir alguns aspectos referentes à análise dos resultados fornecidos pelo programa, vamos apresentar um exemplo meramente ilustrativo da utilização do mesmo. Suponhamos, então, que queiramos estudar a distribuição de temperatura num elemento cúbico de aresta unitária, como mostrado na figura (V-1), em que o fluxo de calor é nulo nas faces laterais, a temperatura é de 0°C na face inferior e de 10°C na face superior.

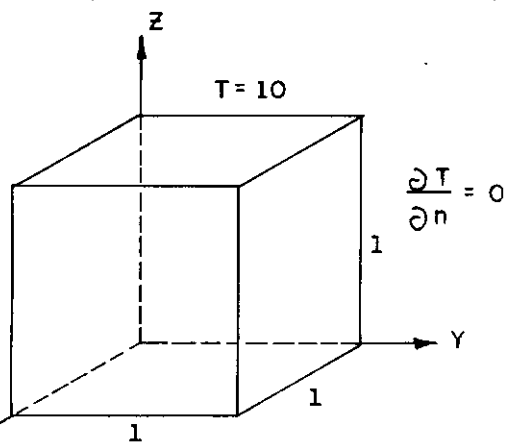


FIGURA (V-1)

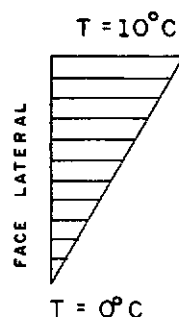


FIGURA (V-2)

A solução exata de tão simples exemplo é determinada com extrema facilidade. Assim, teremos que na face superior o gradiente de temperatura é constante e igual a 10°C/m e na face inferior é, naturalmente, -10°C/m , se supomos que as medidas do cubo são fornecidas em metros. Nas faces laterais teremos na solução, uma variação linear da temperatura, como apresentada na figura (V-2). Vamos, agora, resolver este mesmo problema, numericamente, pelo Método dos Elementos de Contorno, utilizando o programa desenvolvido no presente estudo. Para tanto, suponhamos inicialmente que as faces do cubo são discretizadas como mostra a figura (V-3).

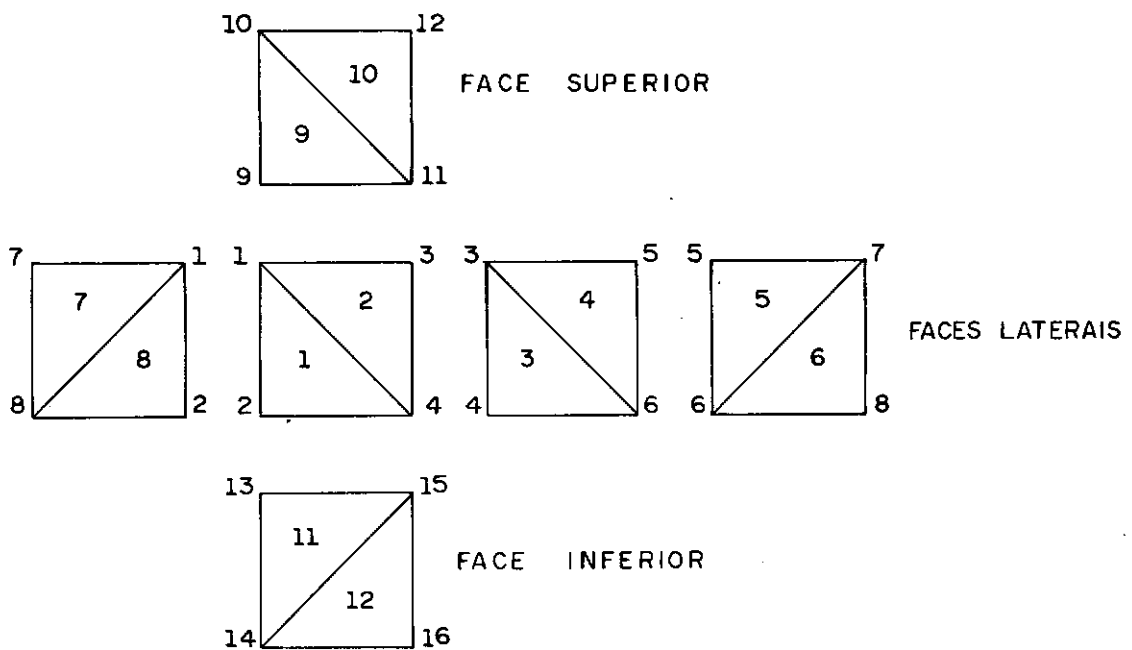


FIGURA (V - 3)

Observemos que existem nós duplos em todos os pontos da discretização do contorno pois em cada um deles conhecemos o valor do potencial e um valor do gradiente (nulo nas direções ortogonais às faces laterais).

Fornecendo, então, os dados necessários à completa solução do problema, considerando, ainda, sete pontos

no interior do domínio com as coordenadas cartesianas $(0.5, 0.5, 0.5)$, $(0.25, 0.5, 0.5)$, $(0.75, 0.5, 0.5)$, $(0.5, 0.25, 0.5)$, $(0.5, 0.75, 0.5)$, $(0.5, 0.5, 0.25)$ e $(0.5, 0.5, 0.75)$, o programa nos oferece os resultados indicados na tabela (V-1).

Tal tabela contém a impressão completa dos dados e resultados do programa para que possamos observar a configuração e distribuição dos valores emitidos. Inicialmente, aparece um cabeçalho comum a todas as impressões do programa para, em seguida, constarem o título do programa, o potencial e o gradiente considerados e os dados gerais do programa, ou seja, número de nós no contorno, número de elementos, número de nós no interior do domínio, número de pontos de integração (igual a 12) e o valor da constante p . A seguir, são impressas as coordenadas dos nós do contorno, as conectividades dos elementos, as condições de contorno e as coordenadas dos nós no interior do domínio, completando assim, a impressão de todos os dados necessários. Logo após, constam os resultados do programa, ou seja, os potenciais e derivadas dos nós do contorno e os potenciais nos nós internos. Finalmente, em página separada, indica-se um quadro contendo os tempos parciais e total de processamento do programa.

TABELA (V-1)

```

*****
*
*
*   PROGRAMA PARA ANALISE DE PROBLEMAS DE CAMPO
*
* *****
*
*   MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
*
* *****
*
*   CARACTERISTICAS :
*
*                               DOMINIO TRIDIMENSIONAL
*                               ELEMENTOS TRIANGULARES
*                               COM VARIACAO LINEAR
* *****
*
*   PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL - COPPE/UFRJ
*
*   TESE DE MESTRADO - 1979
*
*   AUTOR:
*       PEDRO AUGUSTO CEZAR OLIVEIRA DE SA
*
*   ORIENTADOR:
*       ANDRES LUDOVICO HALBRITTER
*
*****

```

TESTE DO CUBO

TRANSFERENCIA DE CALOR

POTENCIAL CONSIDERADO : TEMPERATURA

DERIVADA DO POTENCIAL : GRADIENTE DE TEMPERATURA

DADOS DO PROGRAMA

NUMERO DE NOS NO CONTORNO	=	16
NUMERO DE ELEMENTOS	=	12
NUMERO DE NOS NO INTERIOR DO DOMINIO	=	7
NUMERO DE PONTOS DE INTEGRACAO	=	12
VALOR DA CONSTANTE P	=	0.

COORDENADAS DOS NOS DO CONTORNO

CARTESIANAS

NO	X	Y	Z
1	.10000E+01	0.	.10000E+01
2	.10000E+01	0.	0.
3	.10000E+01	.10000E+01	.10000E+01
4	.10000E+01	.10000E+01	0.
5	0.	.10000E+01	.10000E+01
6	0.	.10000E+01	0.
7	0.	0.	.10000E+01
8	0.	0.	0.
9	.10000E+01	0.	.10000E+01
10	0.	0.	.10000E+01
11	.10000E+01	.10000E+01	.10000E+01
12	0.	.10000E+01	.10000E+01
13	.10000E+01	0.	0.
14	0.	0.	0.
15	.10000E+01	.10000E+01	0.
16	0.	.10000E+01	0.

CONETIVIDADE DOS ELEMENTOS

ELEMENTO	NOS			AREA
1	1	2	4	.50000E+00
2	1	4	3	.50000E+00
3	3	4	6	.50000E+00
4	3	6	5	.50000E+00
5	5	6	7	.50000E+00
6	7	6	8	.50000E+00
7	7	8	1	.50000E+00
8	1	8	2	.50000E+00
9	10	9	11	.50000E+00
10	10	11	12	.50000E+00
11	13	14	15	.50000E+00
12	15	14	16	.50000E+00

CONDICÖES DE CONTORNO

NO		VALOR PRESCRITO
1	DERIVADA	0.
2	DERIVADA	0.
3	DERIVADA	0.
4	DERIVADA	0.
5	DERIVADA	0.
6	DERIVADA	0.
7	DERIVADA	0.
8	DERIVADA	0.
9	POTENCIAL	.10000E+02
10	POTENCIAL	.10000E+02
11	POTENCIAL	.10000E+02
12	POTENCIAL	.10000E+02
13	POTENCIAL	0.
14	POTENCIAL	0.
15	POTENCIAL	0.
16	POTENCIAL	0.

COORDENADAS DOS PONTOS NO INTERIOR DO DOMINIO

CARTESIANAS

NO	X	Y	Z
1	.50000E+00	.50000E+00	.50000E+00
2	.50000E+00	.25000E+00	.50000E+00
3	.50000E+00	.75000E+00	.50000E+00
4	.75000E+00	.50000E+00	.50000E+00
5	.25000E+00	.50000E+00	.50000E+00
6	.50000E+00	.50000E+00	.75000E+00
7	.50000E+00	.50000E+00	.25000E+00

RESULTADOS DO PROGRAMA

POTENCIAIS E DERIVADAS NO CONTORNO

NO	POTENCIAL	DERIVADA
1	.10000E+02	0.
2	0.	0.
3	.10000E+02	0.
4	0.	0.
5	.10000E+02	0.
6	0.	0.
7	.10000E+02	0.
8	0.	0.
9	.10000E+02	.10001E+02
10	.10000E+02	.99998E+01
11	.10000E+02	.99998E+01
12	.10000E+02	.10001E+02
13	0.	-.10001E+02
14	0.	-.99998E+01
15	0.	-.99998E+01
16	0.	-.10001E+02

POTENCIAIS NOS PONTOS INTERNOS

NO	POTENCIAL
1	.49719E+01
2	.48785E+01
3	.48708E+01
4	.48785E+01
5	.48708E+01
6	.72347E+01
7	.25147E+01

```

*****
*
*      TEMPOS DE PROCESSAMENTO DO PROGRAMA      *
*
*****
* UNIDADE: SEGUNDOS                             *
*
*****
* SEGMENTO DO PROGRAMA      *      TEMPO      *
*
*****
* LEITURA E IMPRESSAO DE DADOS      *      1.167      *
* FORMACAO DAS MATRIZES      *      3.217      *
* SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES      *      0.033      *
* POTENCIAIS NOS PONTOS INTERNOS      *      1.700      *
* IMPRESSAO DE RESULTADOS      *      0.133      *
*
*****
*      TOTAL      *      6.250      *
*
*****

```

Analisando tais resultados, observamos que no cálculo das incógnitas, potencial e derivada, uma aproximação maior se verifica nos resultados dos nós do contorno, visto que, neste caso, algumas das integrações são feitas exatamente, enquanto que, para os nós internos recorremos sempre à integração numérica. Isto pode ser constatado em observância à tabela (V-2), onde indicamos os erros relativos de cada resultado realmente calculado, notando que o potencial exato nos nós internos de 1 a 5 vale 5°C , no nó 6 vale 7.5°C e no nó 7 vale 2.5°C .

T A B E L A (V-2)

NÓS NO CONTORNO	
NÓ	ERRO - (DERIVADA) - %
9	0.010
10	- 0.002

OBS.: Os nós de 11 a 16 possuem ,
dois a dois, os mesmos erros
dos nós 9 e 10.

NÓS INTERNOS	
NÓ	ERRO - (POTENCIAL) - %
1	- 0.562
2	- 2.430
3	- 2.584
6	- 5.306
7	0.294

OBS.: O nó 4 tem o mesmo erro relativo do nó 2 e o nó 5 o mesmo do nó 3.

Os resultados não referidos na tabela (V-2) são valores fornecidos como dados do programa ou determinados pelas citadas "equações suplementares" (nós duplos).

Uma discretização mais refinada, como a que mostra a figura (V-4), é então sugerida a fim de que possamos testar a convergência do método e verificar a aproximação para valores calculados do potencial em nós do contorno.

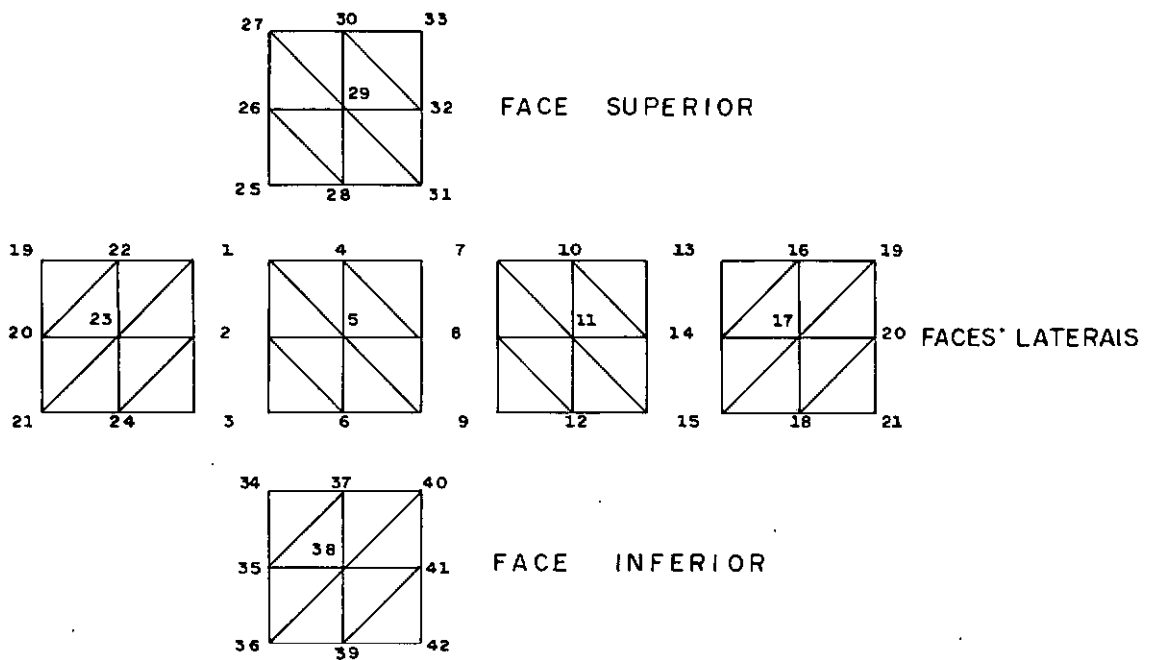


FIGURA (V-4)

Neste caso, são dados como condições de contorno, o valor nulo do gradiente nos pontos de 1 a 24, a temperatura igual a 10°C nos pontos de 25 a 33 e a temperatura nula nos pontos de 34 a 42. Teremos, desta vez, 16 nós duplos (1,3 , 4,6,...,22,24), onde os potenciais são determinados pelas "e

quações suplementares" e não se constituem, portanto, em valores calculados no programa e sim em valores fornecidos como dados. Excluindo, portanto, os valores fornecidos como condições de contorno e mais estes últimos determinados pelas chamadas "equações suplementares", os demais valores, ou seja, os valores realmente calculados pelo programa são indicados na tabela (V-3), onde também constam, em percentagem, os erros relativos.

T A B E L A (V-3)

NÓS NO CONTORNO					
NÓ	SOLUÇÃO NUMÉRICA		SOLUÇÃO EXATA		ERRO RELATIVO(%)
	POTENCIAL	DERIVADA	POTENCIAL	DERIVADA	
2	5.0		5.0		0.0
25		10.0		10.0	0.0
27		9.9996		10.0	- 0.004
34		- 10.0		- 10.0	0.0
36		- 9.9996		- 10.0	- 0.004

OBS.: Os nós 5, 8, 11, ... 23 têm os mesmos resultados e erro relativo do nó 2, os nós 26, 28, 29, 30, 32 e 33 os mesmos do nó 25, o nó 31 os mesmos do nó 27, os nós 35, 37, 38, 39, 41 e 42 os mesmos do nó 34 e o nó 40 os mesmos do nó 36.

NÓS INTERNOS			
NÓ	POTENCIAL		ERRO RELATIVO (%)
	SOLUÇÃO NUMÉRICA	SOLUÇÃO EXATA	
1	5.0	5.0	0.0
2	4.9992	5.0	- 0.008
6	7.4983	7.5	- 0.023
7	2.5001	2.5	0.004

OBS.: Os nós de 3 a 5 possuem os mesmos resultados e erro relativo do nó 2.

Observamos, portanto, que com essa nova discretização os resultados se apresentam mais próximos dos seus valores reais, o que nos leva a crer na convergência e na eficiência do método.

Um outro modelo de discretização pode, ainda, ser escolhido para o exemplo abordado, qual seja, o mostrado na figura (V-5), em que teremos, como condições de contorno, o gradiente nulo nos nós de 1 a 12, a temperatura de 10°C nos nós de 13 a 17 e a temperatura nula nos nós de 18 a 22. Neste caso, os nós duplos serão em número de oito (1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11), onde o potencial é previamente conhecido e determinado no programa pelas "equações suplementares".

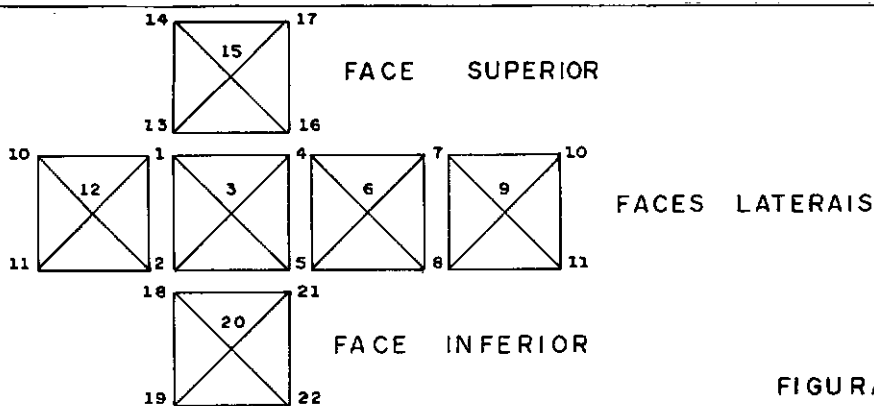


FIGURA (V - 5)

Os resultados realmente calculados no programa são apresentados, então, na tabela (V-4) juntamente com os erros relativos.

T A B E L A (V-4)

NÓS NO CONTORNO					
NÓ	SOLUÇÃO NUMÉRICA		SOLUÇÃO EXATA		ERRO RELATIVO (%)
	POTENCIAL	DERIVADA	POTENCIAL	DERIVADA	
3	5.0		5.0		0.0
13		10.0		10.0	0.0
15		9.9993		10.0	- 0.007
18		- 10.0		-10.0	0.0
20		- 9.9993		-10.0	- 0.007

OBS.: Os nós 6, 9 e 12 têm os mesmos resultados e erro relativo do nó 3, os nós 14, 16 e 17 os mesmos do nó 13 e os nós 19, 21 e 22 os mesmos do nó 18.

NÓS INTERNOS			
NÓ	POTENCIAL		ERRO RELATIVO (%)
	SOLUÇÃO NUMÉRICA	SOLUÇÃO EXATA	
1	4.9999	5.0	- 0.001
2	4.9964	5.0	- 0.036
6	7.4922	7.5	- 0.104
7	2.5007	2.5	0.028

OBS.: Os nós de 3 a 5 possuem os mesmos resultados e erro relativo do nó 2

Com isto comprovamos mais uma vez a eficiência do método, visto que, nesta nova discretização, os resultados permanecem consideravelmente próximos dos reais, com aproximação inferior nos nós internos ao domínio, por razões já levantadas.

Como dito no capítulo precedente, os resultados serão sempre confiáveis desde que tenhamos o gradiente incógnito em apenas uma direção num ponto situado numa região de descontinuidade geométrica. A distorção provocada nos resultados em decorrência de termos o gradiente incógnito em duas ou mais direções, nas condições citadas, pode ser apreciada através deste mesmo exemplo aqui discutido se supomos, por exemplo, que as condições de contorno são a temperatura de 10°C na face superior, de 0°C na face inferior e variando, segundo indica a figura (V-2), na face $Y = 1$ da figura (V-1), além do gradiente nulo nas demais faces do cubo.

Nestas condições, os nós 3, 4, 5 e 6 da discretização apresentada na figura (V-3) terão de ser duplos pois necessitaremos introduzir os valores do potencial e gradiente previamente conhecidos, e os nós 11, 12, 15 e 16 não poderão ser duplos pelo fato de aí, o único valor prescrito ser o do potencial. Como já sabemos, isto provocará erros consideráveis pois, em tais nós, o gradiente possui dois valores e não apenas um como será emitido na solução. Alterando, portanto, a numeração da referida discretização no intuito de considerarmos as novas condições de contorno, teremos a discretização da figura (V-6).

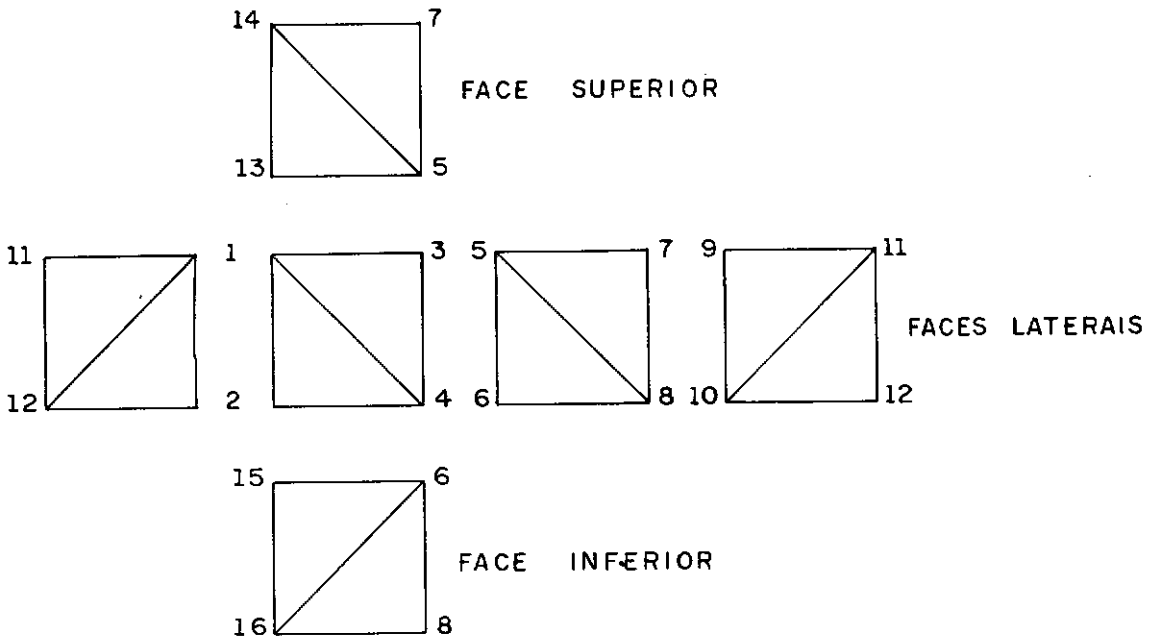


FIGURA (V - 6)

Os resultados realmente calculados pelo programa serão, evidentemente, os gradientes nos nós 5 a 8 e 13 a 16, além dos potenciais nos nós internos. Tais valores constam na tabela (V-5) onde podemos observar claramente a distância que os mesmos conservam dos resultados exatos.

T A B E L A (V-5)

	NÓS NO CONTORNO		
NÓ	DERIVADA		
	SOLUÇÃO NUMÉRICA	SOLUÇÕES EXATAS	
		DIREÇÃO Y	DIREÇÃO Z
5	5.6768	0.0	10.0
6	- 5.6766	0.0	- 10.0
7	5.6772	0.0	10.0
8	- 5.6774	0.0	- 10.0
13	11.35		10.0
15	- 11.35		- 10.0

OBS.: O nó 14 tem os mesmos resultados do nó 13 e o nó 16 os mesmos do nó 15.

NÓS INTERNOS		
NÓ	POTENCIAL	
	SOLUÇÃO NUMÉRICA	SOLUÇÃO EXATA
1	4.9719	5.0
2	4.8785	5.0
3	4.8708	5.0
4	4.8788	5.0
5	4.8706	5.0
6	7.1604	7.5
7	2.5889	2.5

Como observamos, os resultados, neste caso, estão muito aquém de uma aproximação considerada razoável, sendo que, nos nós internos, desta vez, os resultados calculados são se tão mais próximos dos reais. Nos nós de 5 a 8 no contorno, onde haveriam de existir nós duplos, os valores encontrados para o gradiente são mais próximos da média (5.0) do que de um dos valores corretos (0.0 ou 10.0), o que não ocorre em relação aos valores encontrados nos nós de 13 a 16 que estão mais próximos do valor correto (10.0). É evidente que se tivermos um exemplo de grandes proporções e forem poucos os pontos onde se registram tais problemas, o erro pode ser ali viado porém nunca totalmente contornado. Portanto, repeti mos que o fato de não podermos prescrever o potencial em ma is de um ponto com coordenadas idênticas se constitui na maior e mais preocupante limitação do nosso estudo.

No próximo capítulo, mostraremos, finalmente, al gumas aplicações práticas do método estudado, paralelamente a uma breve análise dos resultados apresentados pelo progra ma.

A P L I C A Ç Õ E S

Para concluirmos o nosso estudo, apresentamos, a seguir, três aplicações práticas do Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas de transferência de calor e de fluxo de água no solo.

APLICAÇÃO 1 :

Inicialmente, consideremos uma peça cilíndrica tal como mostrada na figura (VI - 1) em que desejamos estudar a distribuição de temperatura em seu interior e sobre as superfícies de contorno⁹, conhecidos previamente:

a) o gradiente de temperatura $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$ nas faces laterais e

$\frac{\partial T}{\partial n} = 31,21^{\circ}\text{C}/\text{cm}$ na face inferior, e,

b) a temperatura $T = 20^{\circ}\text{C}$ na face superior.

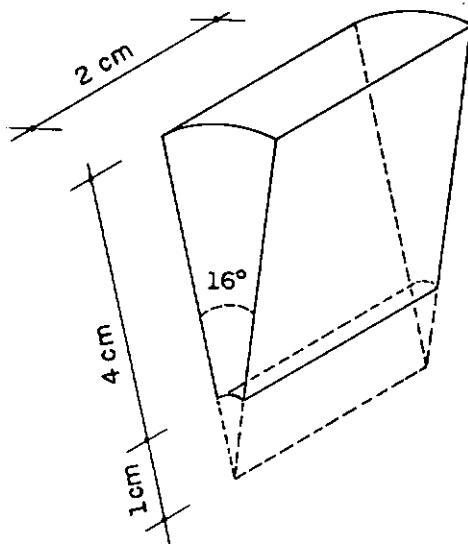


FIGURA (VI - 1)

É evidente que, nas condições supostas, o problema pode ser estudado como sendo de fluxo bidimensional e é aqui considerado, apenas no objetivo de mostrarmos a convergência do método e a comparação dos resultados com a solução exata conhecida, num exemplo em que as superfícies de contorno não são planas como supõe o modelo desenvolvido.

Se considerarmos as discretizações mostradas nas figuras (VI-2) e (VI-3) e mais três pontos no interior do domínio, dispostos de modo a ficarem equidistantes das faces laterais e distantes 1 cm, 2 cm e 3 cm, respectivamente, das faces superior e inferior, teremos duas soluções numéricas distintas para o problema sugerido.

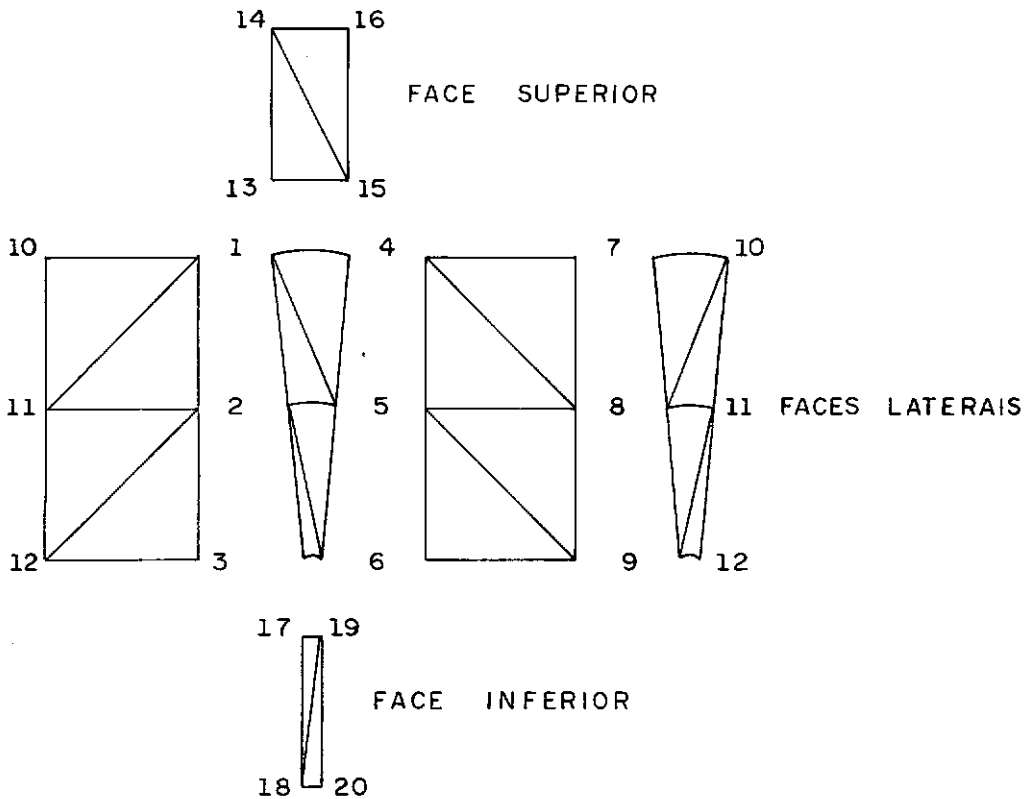


FIGURA (IV - 2)

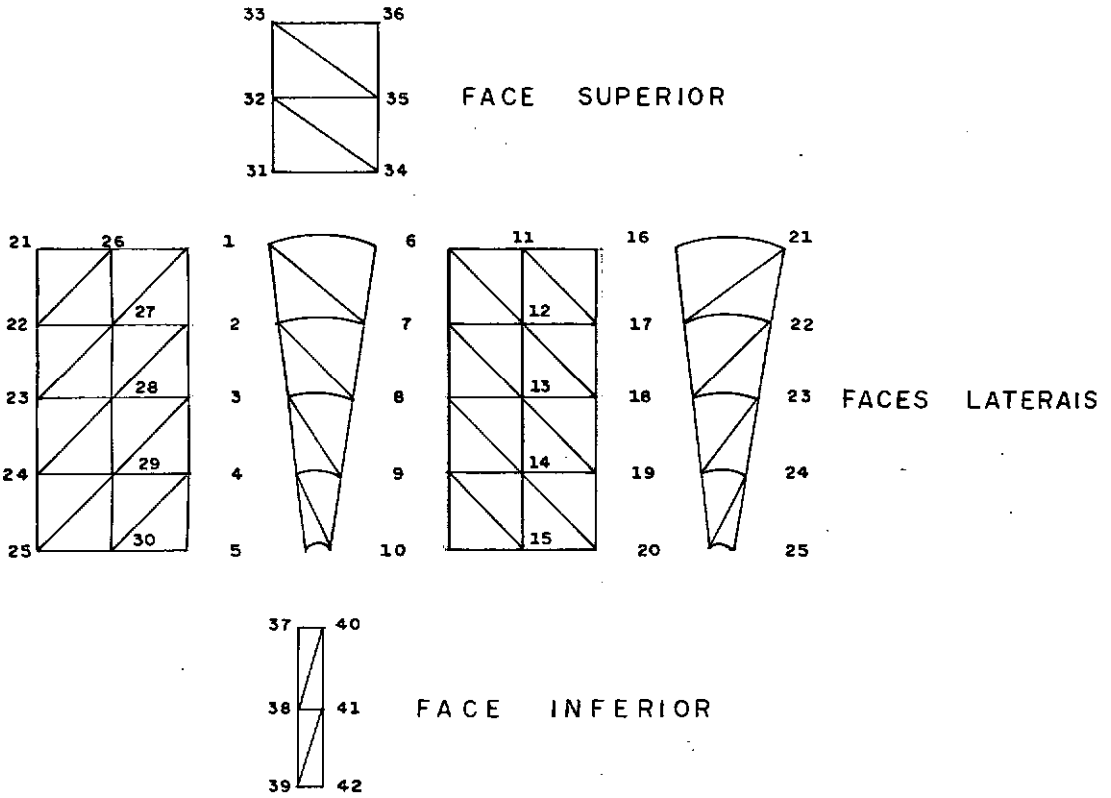


FIGURA (VI - 3)

Como dissemos, o fluxo é bidimensional e se processará nas direções do raio da peça cilíndrica, ou seja, nas direções normais às superfícies inferior e superior da peça. Portanto numa seção curva paralela a estas faces, o potencial, por exemplo, será constante, sendo as variações porventura verificadas em pontos pertencentes a uma mesma seção curva, decorrentes das aproximações inevitáveis no cálculo pelo programa. Assim sendo, podemos apresentar como na tabela (VI-1), os resultados obtidos nas duas soluções numéricas, juntamente com a solução exata.

TABELA (VI-1)

RAIO (cm)	1a. SOLUÇÃO NUMÉRICA		2a. SOLUÇÃO NUMÉRICA		SOLUÇÃO EXATA	
	T (°C)	$\frac{\partial T}{\partial n}$ (°C/cm)	T (°C)	$\frac{\partial T}{\partial n}$ (°C/cm)	T (°C)	$\frac{\partial T}{\partial n}$ (°C/cm)
1	73.289	31.210	71.699	31.210	70.25	31.21
2	41.797		50.482		48.60	
3	38.292		37.033		35.96	
4	27.892		27.382		26.96	
5	20.000	- 7.464	20.000	- 6.615	20.00	- 6.24

À exceção da temperatura nos pontos de raio igual a 5cm e do gradiente nos pontos de raio igual a 1cm, todos os demais valores são calculados no programa. Os potenciais (temperaturas) nos pontos de raio 2cm, 3cm e 4cm da primeira solução numérica são resultados de pontos internos, enquanto os demais potenciais e gradientes, são valores médios de resultados no contorno.

Como podemos verificar, há convergência dos resultados numéricos para o valor exato conhecido à medida que o contorno é melhor discretizado. Tal fato é confirmado na tabela (VI-2) onde são indicados os erros relativos de cada resultado numérico.

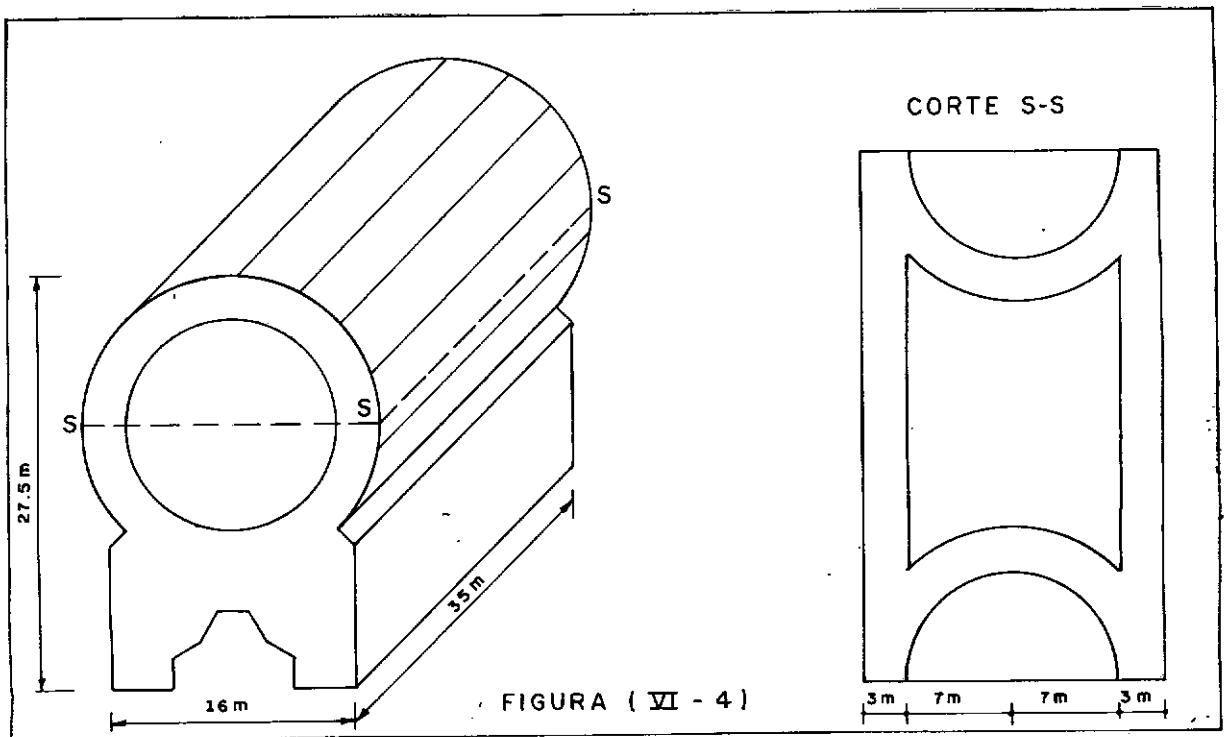
TABELA (VI-2)

ERRO RELATIVO (%)				
RAIO (cm)	1ª SOLUÇÃO NUMÉRICA		2ª SOLUÇÃO NUMÉRICA	
	T	$\frac{\partial T}{\partial n}$	T	$\frac{\partial T}{\partial n}$
1	4.33	-	2.06	-
2	-14.00		3.87	
3	6.48		2.98	
4	3.46		1.57	
5	-	19.62	-	6.01

Apesar de comprovada a convergência do método, verificamos que em alguns resultados o erro percentual se apresenta relativamente grande o que se deve porém, ao fato de superfícies curvas serem discretizadas com elementos planos. A simples introdução de "elementos quadráticos" ou "cúbicos" tornaria as soluções numéricas mais aprimoradas, e teríamos melhores resultados com discretizações menos trabalhosas.

APLICAÇÃO 2 :

Vamos agora considerar um problema de transferência de calor que ocorre nas estruturas de reatores nucleares, qual seja, o problema decorrente do alto gradiente de temperatura que se verifica nas paredes do vaso de pressão do reator. Tomemos, como exemplo, a estrutura apresentada na figura (VI-4) que muito se assemelha ao vaso de pressão do reator francês MARCOULE.¹⁰



Se considerarmos que a temperatura no interior do vaso é constante e igual a 90°C e, no exterior é mantida igual a 30°C , poderemos, devido à simetria do problema, discretizar apenas um quarto da superfície de contorno da estrutura, como mostrada na figura (VI-5) e, assim, considerar como condição de

contorno nas faces referentes ao seccionamento da estrutura, o gradiente nulo. Assim, teremos previamente conhecidos :

- a) a temperatura $T = 90^{\circ}\text{C}$ nas faces internas e $T = 30^{\circ}\text{C}$ nas faces externas do vaso de pressão, e,
- b) o gradiente de temperatura, $\frac{\partial T}{\partial n} = 0$, nas faces onde o vaso foi seccionado.

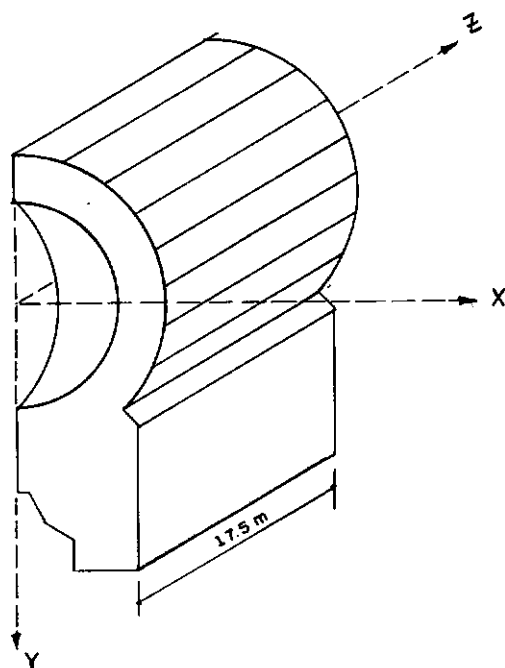
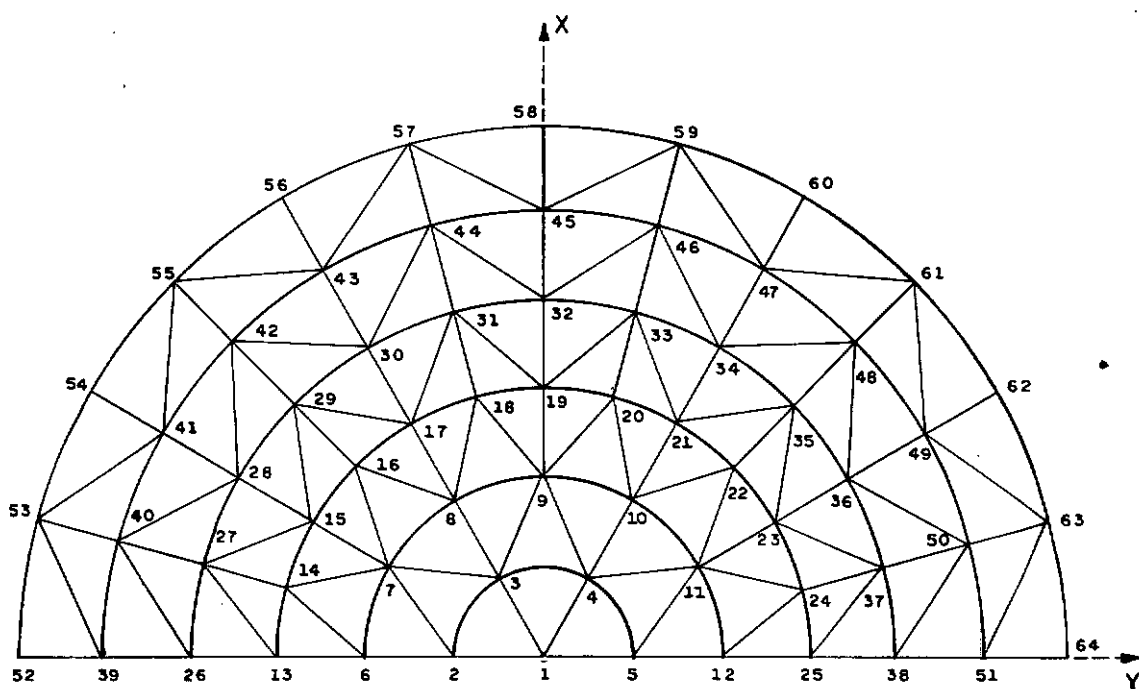
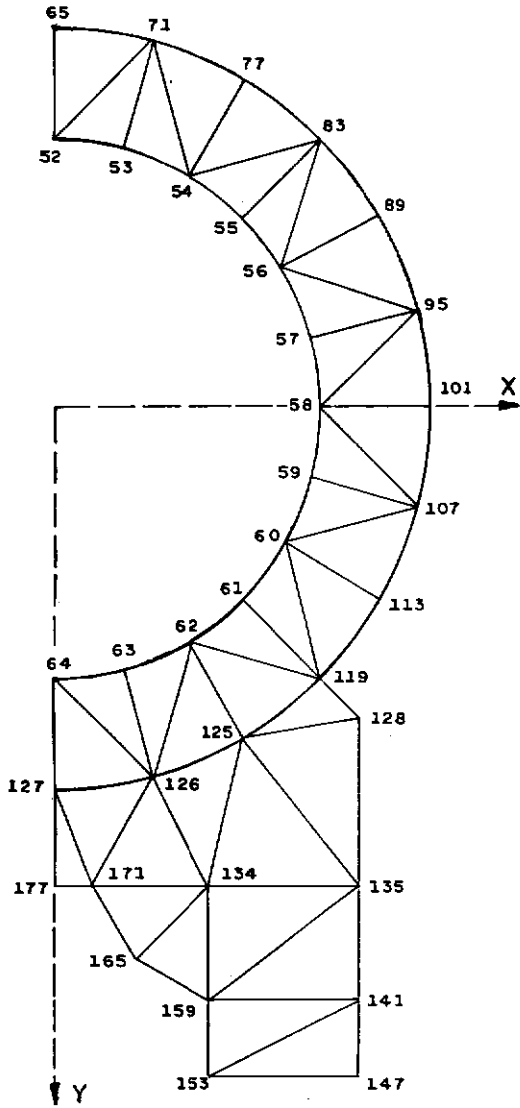
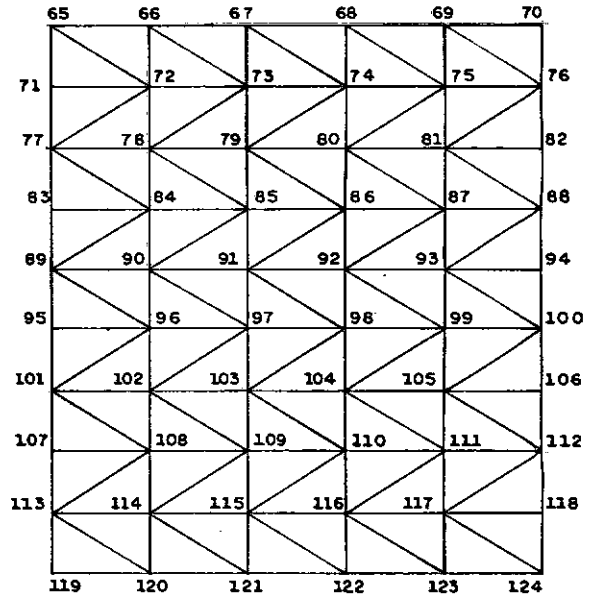


FIGURA (VI-5)

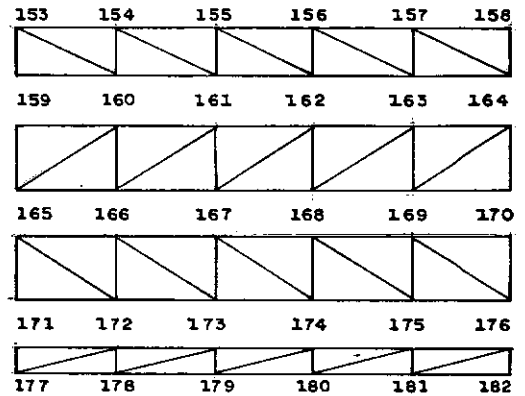
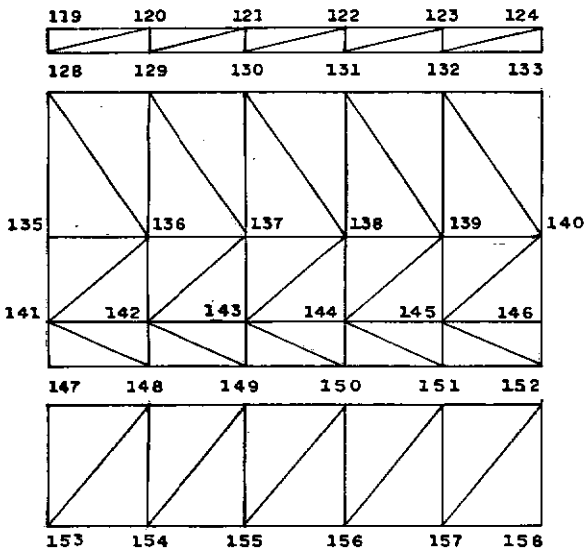
Para estudarmos este problema, vamos estabelecer a discretização apresentada na figura (VI-6).



FACE ESFÉRICA EXTERNA

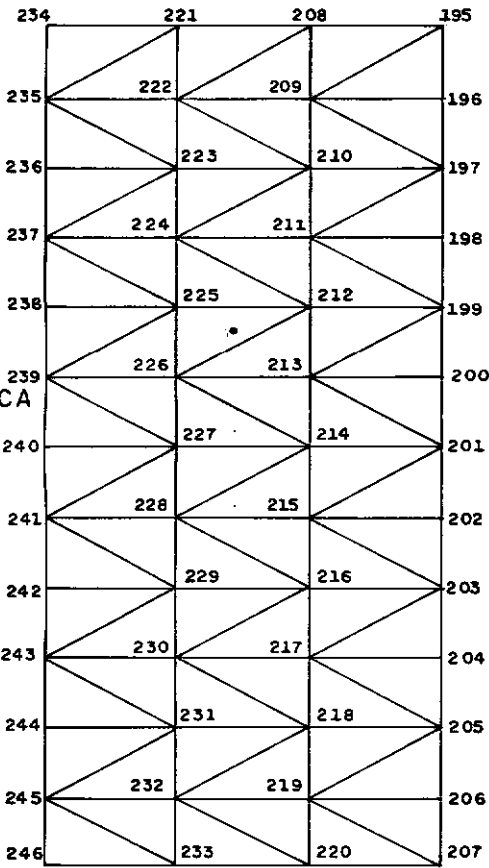
FACE $Z = 0$ 

FACE CILÍNDRICA EXTERNA

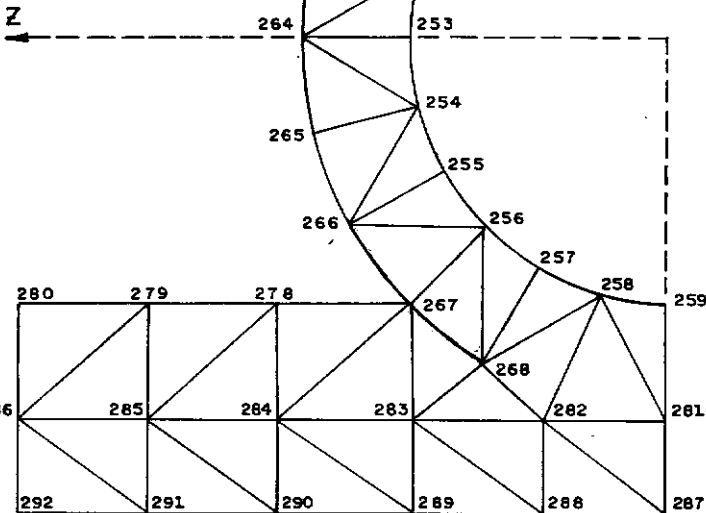
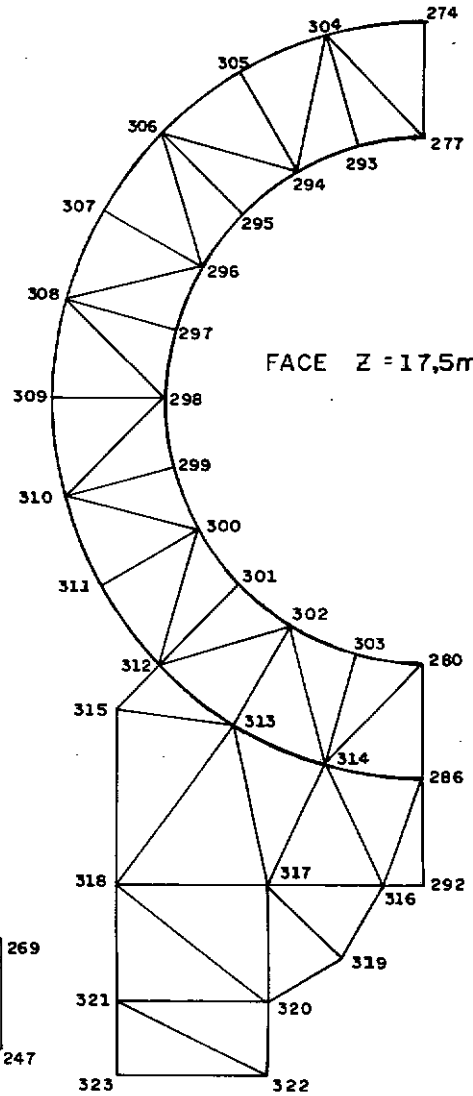


FACES LATERAIS RETANGULARES

FACE
CILINDRICA
INTERNA



FACE $Z = 17,5m$



FACE $X = 0$

FACE ESFÉRICA
INTERNA

FIGURA (VI - 6)

Neste exemplo, teremos, porém, resultados com distorções consideráveis pelo fato de não ser possível, ainda, estabelecer nós múltiplos em pontos que pertencem a regiões de descontinuidade geométrica acentuada, onde conhecemos, previamente, apenas o potencial (temperatura). De qualquer forma, tais resultados são apresentados na tabela (VI-3).

Os valores dados e calculados da temperatura e do gradiente nos diversos pontos da discretização terão a finalidade máxima de, a posteriori, nos servir de dados para a determinação das tensões térmicas que surgirão nas paredes do vaso de pressão devidas à diferença de temperatura entre o seu interior e o ambiente externo, além de nos fornecer a distribuição dos mesmos na superfície de contorno do vaso.

Apesar de não conhecermos a solução exata do problema, podemos analisar certos resultados porém, de um ponto de vista relativamente pouco significativo.

Sabemos, por exemplo, que é nula a soma algébrica do fluxo total de calor que entra com o fluxo total de calor que sai em qualquer porção limitada do corpo por superfícies cujo fluxo normal é nulo.

Podemos, com relativa tolerância, considerar que isto ocorre, por exemplo, na porção compreendida pelas seções $Z = 17.5m$ e $Z = 14.0m$ e pelo ângulo $\theta = 15^\circ$ mostrados na figura (VI-7).

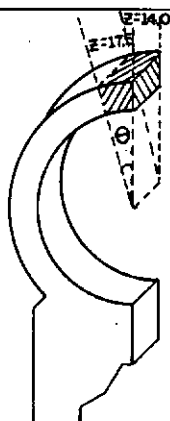


FIGURA (VI - 7)

O fluxo total médio que entra será

$$Q_e = - k \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_e A_e, \quad (\text{VI-1})$$

e o fluxo total médio que sai será

$$Q_s = - k \left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_s A_s, \quad (\text{VI-2})$$

onde k é a condutividade térmica do material do vaso de pressão,

$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_e$ é o gradiente médio na seção curva limitada pelos nós 221, 222, 234 e 235,

A_e é a área desta seção,

$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_s$ é o gradiente médio na seção curva limitada pelos nós 69, 70, 75 e 76, e

A_s é a área desta outra seção.

Se considerarmos (apenas para efeito de análise) a condutividade $k = 1 \text{ Kcal/m } ^\circ\text{C}$, e sendo

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_e = 24.44625 \text{ } ^\circ\text{C/m}, A_e = 6.414 \text{ m}^2,$$

$$\left(\frac{\partial t}{\partial n} \right)_s = -16.81875 \text{ } ^\circ\text{C/m} \text{ e } A_s = 9.163 \text{ m}^2,$$

os valores procurados são

$$Q_e = - 156,8 \text{ Kcal} \quad e$$

$$Q_s = 154,11 \text{ Kcal}.$$

Admitindo os erros, já levantados, que os resultados deste exemplo apresentam, podemos afirmar que a relação entre o calor que entra e o calor que sai é verificada.

T A B E L A (VI-3)

RESULTADOS DO PROGRAMA

POTENCIAIS E DERIVADAS NO CONTORNO

NO	POTENCIAL	DERIVADA
1	.30000E+02	-.30086E+02
2	.30000E+02	-.29817E+02
3	.30000E+02	-.28061E+02
4	.30000E+02	-.28082E+02
5	.30000E+02	-.29866E+02
6	.30000E+02	-.31013E+02
7	.30000E+02	-.29295E+02
8	.30000E+02	-.30016E+02
9	.30000E+02	-.30060E+02
10	.30000E+02	-.30020E+02
11	.30000E+02	-.29239E+02
12	.30000E+02	-.30889E+02
13	.30000E+02	-.23607E+02
14	.30000E+02	-.21306E+02
15	.30000E+02	-.22440E+02
16	.30000E+02	-.22470E+02
17	.30000E+02	-.22411E+02
18	.30000E+02	-.22452E+02
19	.30000E+02	-.22414E+02
20	.30000E+02	-.22485E+02
21	.30000E+02	-.22512E+02
22	.30000E+02	-.22858E+02
23	.30000E+02	-.23195E+02
24	.30000E+02	-.22282E+02
25	.30000E+02	-.24641E+02
26	.30000E+02	-.73265E+01
27	.30000E+02	-.60558E+01
28	.30000E+02	-.67484E+01
29	.30000E+02	-.67272E+01
30	.30000E+02	-.67421E+01
31	.30000E+02	-.67398E+01
32	.30000E+02	-.67480E+01
33	.30000E+02	-.67703E+01

34	.30000E+02	-.69181E+01
35	.30000E+02	-.76001E+01
36	.30000E+02	-.87485E+01
37	.30000E+02	-.88050E+01
38	.30000E+02	-.10105E+02
39	.30000E+02	-.11519E+01
40	.30000E+02	-.78919E+00
41	.30000E+02	-.92832E+00
42	.30000E+02	-.92215E+00
43	.30000E+02	-.92271E+00
44	.30000E+02	-.92130E+00
45	.30000E+02	-.92289E+00
46	.30000E+02	-.92735E+00
47	.30000E+02	-.98565E+00
48	.30000E+02	-.13819E+01
49	.30000E+02	-.22318E+01
50	.30000E+02	-.25748E+01
51	.30000E+02	-.29602E+01
52	.30000E+02	-.17962E+00
53	.30000E+02	-.31219E-01
54	.30000E+02	-.71003E-01
55	.30000E+02	-.62853E-01
56	.30000E+02	-.61125E-01
57	.30000E+02	-.59359E-01
58	.30000E+02	-.59255E-01
59	.30000E+02	-.59121E-01
60	.30000E+02	-.78367E-01
61	.30000E+02	-.13710E+00
62	.30000E+02	-.16057E+00
63	.30000E+02	-.92602E-01
64	.30000E+02	-.25968E+00
65	.30000E+02	-.10851E+00
66	.30000E+02	-.18565E+01
67	.30000E+02	-.13983E+02
68	.30000E+02	-.17633E+02
69	.30000E+02	-.16471E+02
70	.30000E+02	-.16689E+02
71	.30000E+02	.31619E-01
72	.30000E+02	-.16264E+01

73	.30000E+02	-.14048E+02
74	.30000E+02	-.17805E+02
75	.30000E+02	-.16941E+02
76	.30000E+02	-.17174E+02
77	.30000E+02	-.62716E-02
78	.30000E+02	-.17029E+01
79	.30000E+02	-.13883E+02
80	.30000E+02	-.17662E+02
81	.30000E+02	-.16643E+02
82	.30000E+02	-.16881E+02
83	.30000E+02	-.22166E-02
84	.30000E+02	-.17178E+01
85	.30000E+02	-.13916E+02
86	.30000E+02	-.17690E+02
87	.30000E+02	-.16672E+02
88	.30000E+02	-.16911E+02
89	.30000E+02	-.38302E-02
90	.30000E+02	-.17205E+01
91	.30000E+02	-.13916E+02
92	.30000E+02	-.17687E+02
93	.30000E+02	-.16668E+02
94	.30000E+02	-.16908E+02
95	.30000E+02	-.39846E-02
96	.30000E+02	-.17241E+01
97	.30000E+02	-.13924E+02
98	.30000E+02	-.17697E+02
99	.30000E+02	-.16677E+02
100	.30000E+02	-.16920E+02
101	.30000E+02	.11662E-02
102	.30000E+02	-.17058E+01
103	.30000E+02	-.13887E+02
104	.30000E+02	-.17649E+02
105	.30000E+02	-.16627E+02
106	.30000E+02	-.16872E+02
107	.30000E+02	-.81894E-02
108	.30000E+02	-.17939E+01
109	.30000E+02	-.14122E+02
110	.30000E+02	-.17982E+02
111	.30000E+02	-.16974E+02

112	.30000E+02	-.17225E+02
113	.30000E+02	.10716E+00
114	.30000E+02	-.10437E+01
115	.30000E+02	-.12272E+02
116	.30000E+02	-.15706E+02
117	.30000E+02	-.14706E+02
118	.30000E+02	-.14951E+02
119	.30000E+02	.17722E-01
120	.30000E+02	-.43508E+01
121	.30000E+02	-.23332E+02
122	.30000E+02	-.30783E+02
123	.30000E+02	-.30005E+02
124	.30000E+02	-.30339E+02
125	.30000E+02	-.12386E+01
126	.30000E+02	-.15052E+01
127	.30000E+02	-.15218E+01
128	.30000E+02	.96481E-01
129	.30000E+02	-.18159E+00
130	.30000E+02	-.11767E+01
131	.30000E+02	-.21549E+01
132	.30000E+02	-.21254E+01
133	.30000E+02	-.22829E+01
134	.30000E+02	-.56552E+00
135	.30000E+02	-.39629E-01
136	.30000E+02	-.95307E+00
137	.30000E+02	-.22670E+01
138	.30000E+02	-.30783E+01
139	.30000E+02	-.32250E+01
140	.30000E+02	-.33842E+01
141	.30000E+02	-.10364E-01
142	.30000E+02	-.50401E-01
143	.30000E+02	-.16782E+00
144	.30000E+02	-.28143E+00
145	.30000E+02	-.26060E+00
146	.30000E+02	-.39842E+00
147	.30000E+02	-.44408E-01
148	.30000E+02	-.64458E-01
149	.30000E+02	-.12284E+00
150	.30000E+02	-.16345E+00

151	.30000E+02	-.14288E+00
152	.30000E+02	-.23761E+00
153	.30000E+02	.18251E-01
154	.30000E+02	.86030E-01
155	.30000E+02	.12311E+00
156	.30000E+02	.13470E+00
157	.30000E+02	.15600E+00
158	.30000E+02	.10329E+00
159	.30000E+02	-.26034E-01
160	.30000E+02	-.61044E+00
161	.30000E+02	-.14063E+01
162	.30000E+02	-.20785E+01
163	.30000E+02	-.21884E+01
164	.30000E+02	-.23162E+01
165	.30000E+02	.17379E+00
166	.30000E+02	.33528E+00
167	.30000E+02	.11959E+00
168	.30000E+02	-.12428E+00
169	.30000E+02	-.20492E+00
170	.30000E+02	-.24532E+00
171	.30000E+02	-.48724E-01
172	.30000E+02	-.39090E+01
173	.30000E+02	-.10160E+02
174	.30000E+02	-.13634E+02
175	.30000E+02	-.14142E+02
176	.30000E+02	-.14300E+02
177	.30000E+02	.40713E+00
178	.30000E+02	-.13772E+01
179	.30000E+02	-.54364E+01
180	.30000E+02	-.78927E+01
181	.30000E+02	-.80986E+01
182	.30000E+02	-.81957E+01
183	.90000E+02	.12325E+02
184	.90000E+02	.15558E+02
185	.90000E+02	.16723E+02
186	.90000E+02	.16630E+02
187	.90000E+02	.15289E+02
188	.90000E+02	.16719E+01
189	.90000E+02	.31780E+01

190	.900000E+02	.23968E+01
191	.900000E+02	.24807E+01
192	.900000E+02	.25453E+01
193	.900000E+02	.44410E+01
194	.900000E+02	.37762E+01
195	.900000E+02	.53223E+02
196	.900000E+02	.55233E+02
197	.900000E+02	.54089E+02
198	.900000E+02	.54054E+02
199	.900000E+02	.54111E+02
200	.900000E+02	.54077E+02
201	.900000E+02	.54118E+02
202	.900000E+02	.54057E+02
203	.900000E+02	.54142E+02
204	.900000E+02	.51769E+02
205	.900000E+02	.47276E+02
206	.900000E+02	.46523E+02
207	.900000E+02	.44427E+02
208	.900000E+02	.18865E+02
209	.900000E+02	.19309E+02
210	.900000E+02	.19066E+02
211	.900000E+02	.19037E+02
212	.900000E+02	.19028E+02
213	.900000E+02	.19038E+02
214	.900000E+02	.19042E+02
215	.900000E+02	.19013E+02
216	.900000E+02	.19079E+02
217	.900000E+02	.16702E+02
218	.900000E+02	.11688E+02
219	.900000E+02	.10068E+02
220	.900000E+02	.93254E+01
221	.900000E+02	.25318E+02
222	.900000E+02	.24514E+02
223	.900000E+02	.24997E+02
224	.900000E+02	.24958E+02
225	.900000E+02	.24969E+02
226	.900000E+02	.24968E+02
227	.900000E+02	.24978E+02
228	.900000E+02	.24940E+02

229	.900000E+02	.25004E+02
230	.900000E+02	.22511E+02
231	.900000E+02	.17100E+02
232	.900000E+02	.14583E+02
233	.900000E+02	.14817E+02
234	.900000E+02	.24334E+02
235	.900000E+02	.23619E+02
236	.900000E+02	.24017E+02
237	.900000E+02	.23979E+02
238	.900000E+02	.23982E+02
239	.900000E+02	.23983E+02
240	.900000E+02	.23985E+02
241	.900000E+02	.23938E+02
242	.900000E+02	.23958E+02
243	.900000E+02	.21400E+02
244	.900000E+02	.16010E+02
245	.900000E+02	.13664E+02
246	.900000E+02	.13757E+02
247	.300000E+02	0.
248	.300000E+02	0.
249	.300000E+02	0.
250	.300000E+02	0.
251	.300000E+02	0.
252	.300000E+02	0.
253	.300000E+02	0.
254	.300000E+02	0.
255	.300000E+02	0.
256	.300000E+02	0.
257	.300000E+02	0.
258	.300000E+02	0.
259	.300000E+02	0.
260	.38014E+02	0.
261	.88296E+02	0.
262	.900000E+02	0.
263	.900000E+02	0.
264	.900000E+02	0.
265	.900000E+02	0.
266	.900000E+02	0.
267	.88896E+02	0.

268	.45946E+02	0.
269	.30000E+02	0.
270	.30000E+02	0.
271	.30000E+02	0.
272	.30000E+02	0.
273	.30000E+02	0.
274	.30000E+02	0.
275	.90000E+02	0.
276	.90000E+02	0.
277	.90000E+02	0.
278	.90000E+02	0.
279	.90000E+02	0.
280	.90000E+02	0.
281	.30000E+02	0.
282	.36126E+02	0.
283	.48471E+02	0.
284	.54507E+02	0.
285	.55022E+02	0.
286	.55161E+02	0.
287	.30000E+02	0.
288	.30000E+02	0.
289	.30000E+02	0.
290	.30000E+02	0.
291	.30000E+02	0.
292	.30000E+02	0.
293	.90000E+02	0.
294	.90000E+02	0.
295	.90000E+02	0.
296	.90000E+02	0.
297	.90000E+02	0.
298	.90000E+02	0.
299	.90000E+02	0.
300	.90000E+02	0.
301	.90000E+02	0.
302	.90000E+02	0.
303	.90000E+02	0.
304	.30000E+02	0.
305	.30000E+02	0.
306	.30000E+02	0.

307	.30000E+02	0.
308	.30000E+02	0.
309	.30000E+02	0.
310	.30000E+02	0.
311	.30000E+02	0.
312	.30000E+02	0.
313	.52175E+02	0.
314	.55924E+02	0.
315	.30000E+02	0.
316	.30000E+02	0.
317	.37140E+02	0.
318	.30000E+02	0.
319	.30000E+02	0.
320	.30000E+02	0.
321	.30000E+02	0.
322	.30000E+02	0.
323	.30000E+02	0.

APLICAÇÃO 3 :

Estudemos agora um problema de fluxo tridimensional de água sob uma barragem de concreto. Este caso ocorre, por exemplo, quando temos um rio cujo leito é estreito e a seção transversal de material poroso (areia) sob a lâmina d'água, apresenta as faces laterais com inclinações consideráveis. Imaginemos, portanto, uma barragem de concreto construída num rio com estas características, como a mostrada na figura (VI-8).

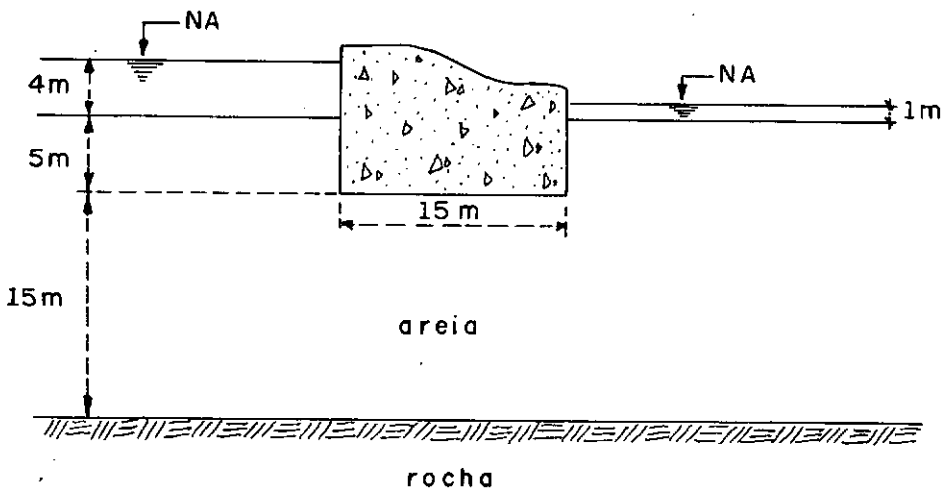


FIGURA (VI - 8)

A figura (VI-9) ilustra a seção do rio.

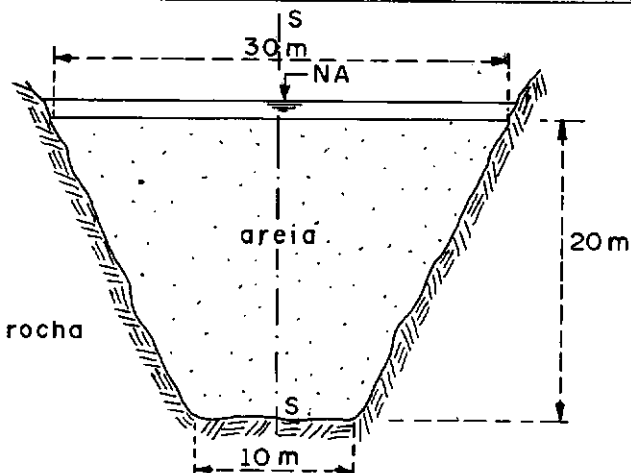


FIGURA (VI - 9)

O domínio do problema será constituído, naturalmente, do material poroso (através do qual se verifica o fluxo de água), tendo como contorno, as superfícies de contato com o solo impermeável (rocha), com a água e com a barragem. Considerando, porém, a simetria em relação à seção longitudinal S-S indicada na figura (VI - 9), será necessário discretizarmos apenas a metade do domínio, como mostra da na figura (VI-10).

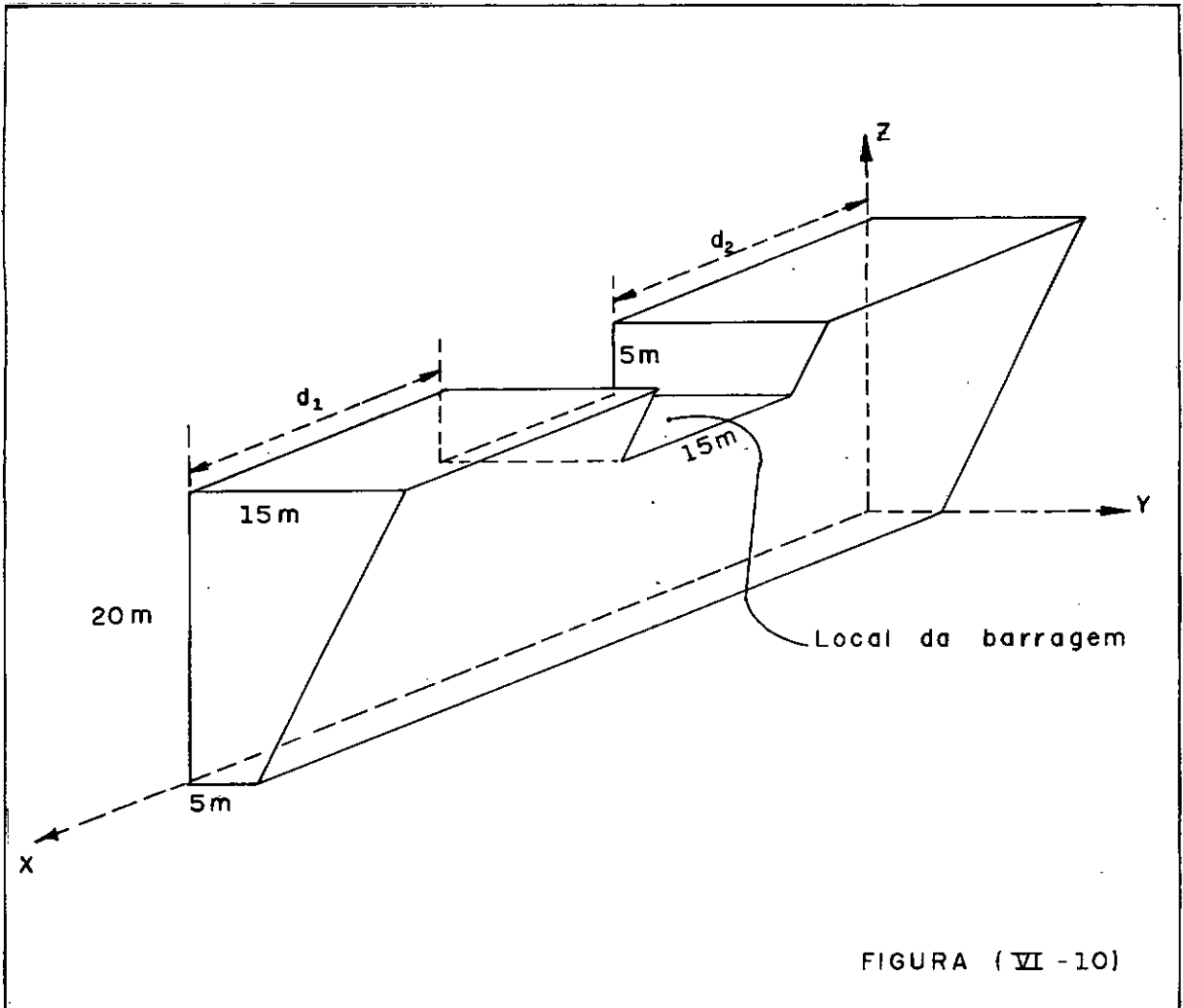


FIGURA (VI - 10)

Na direção x , sabemos que o domínio deve ser considerado infinito em ambos os sentidos. Como tal consideração não faz parte do modelo sugerido, teremos que, nesta direção, seccionar o domínio a uma distância tal da barragem que os resultados obtidos nas suas proximidades não sejam profundamente afetados. Isto porque se o potencial considerado é a pressão representada pela altura d'água e a sua derivada é o gradiente hidráulico, teremos de impor como condições de contorno nas superfícies limites normais ao eixo x ,

as variações do potencial representadas nas figuras (VI-11) e (VI-12).

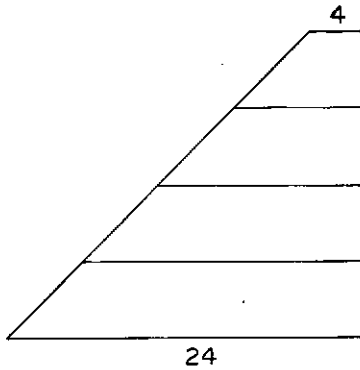


FIGURA (VI-11): Variação da pressão à montante da barragem.

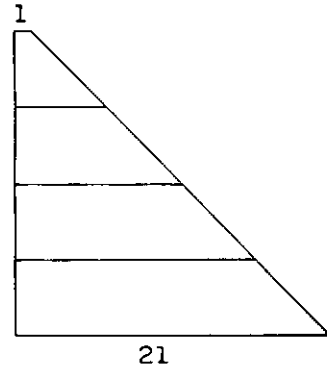
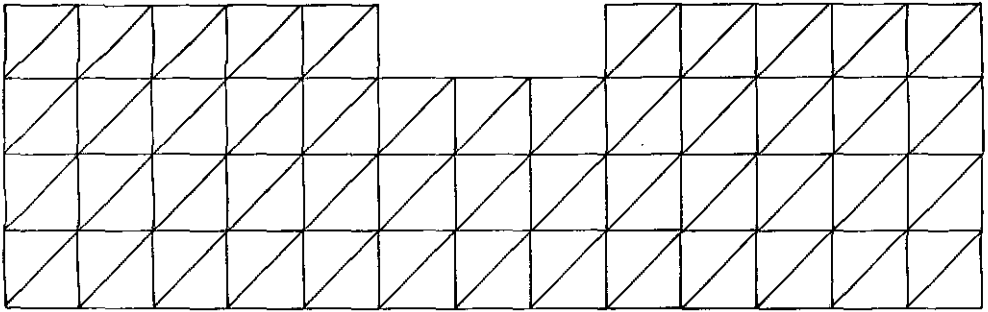


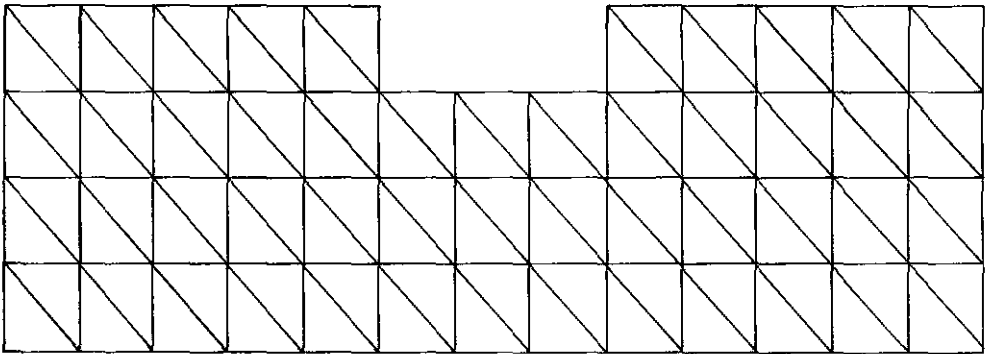
FIGURA (VI-12): Variação da pressão à jusante da barragem.

Naturalmente, a pressão só será assim distribuída em seções muito distantes da barragem e, conseqüentemente os resultados só serão consideráveis para distâncias d_1 e d_2 , da figura (VI-10), superiores a determinados valores empíricos. Uma maneira razoável de verificar se os resultados obtidos são, pelo menos, coerentes, é se certificar, numa seção longitudinal qualquer, de que os valores do potencial em pontos diretamente sob a barragem, são intermediários entre os valores conhecidos da altura d'água à jusante e à montante da barragem. Isto porque sabemos que o fluxo se dirige do maior para o menor potencial sob a barragem. No nosso caso, por exemplo, tais valores devem se situar entre 4 m e 1m.

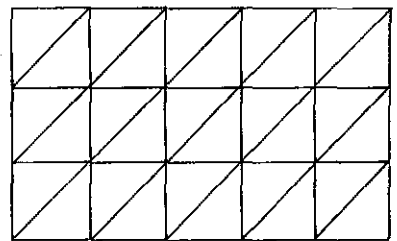
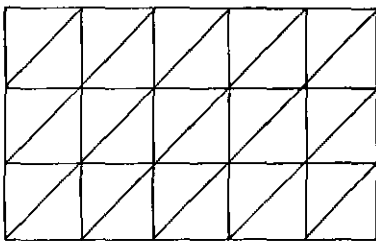
Consideremos, por exemplo, que $d_1 = d_2 = 25$ m e adotemos a discretização da figura (VI-13).



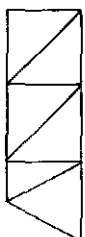
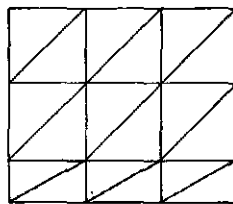
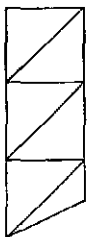
SUPERFÍCIE DE SIMETRIA, $Y = 0$



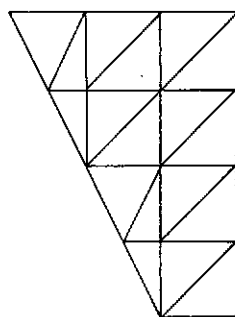
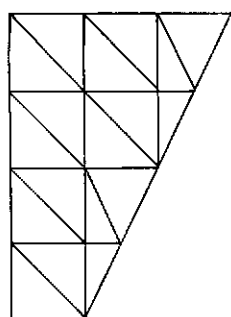
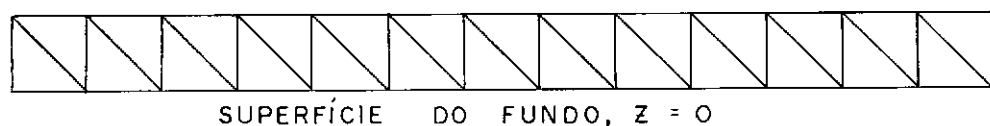
SUPERFÍCIE INCLINADA OPOSTA À SUPERFÍCIE DE SIMETRIA



SUPERFÍCIES DE CONTATO COM A ÁGUA, $Z = 20$



SUPERFÍCIES DE CONTATO COM A BARRAGEM



SUPERFÍCIES LIMITES NORMAIS À DIREÇÃO X

FIGURA (VI - 13)

Como condições de contorno, suponhamos o gradiente nulo nas superfícies de contato do solo poroso com a rocha e com a barragem de concreto (que são impermeáveis), além da superfície de simetria ($y=0$); o potencial variando conforme mostram as figuras (VI-11) e (VI-12) nas superfícies $x = 65$ e $x = 0$, respectivamente, e constante e igual a 1 à jusante e igual a 4 à montante da barragem, nas superfícies $z = 20$.

Se analisarmos, por exemplo, os resultados na superfície de simetria ($y = 0$), teremos a distribuição de potencial apresentada na figura (VI-14).

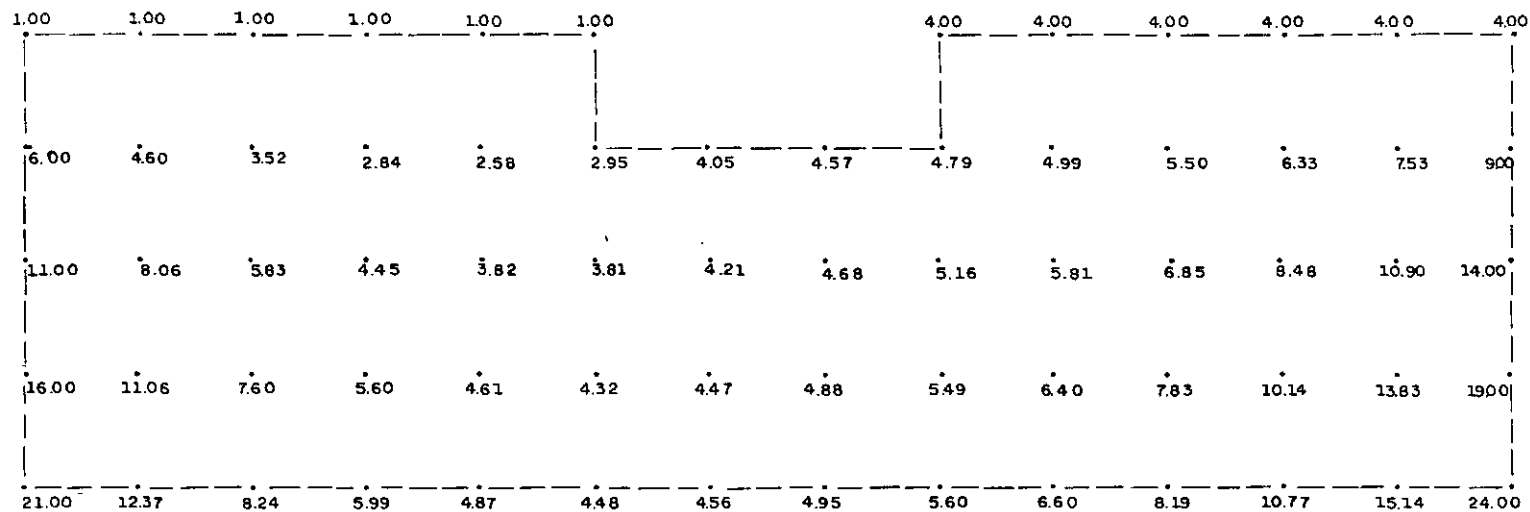


FIGURA (VI - 14)

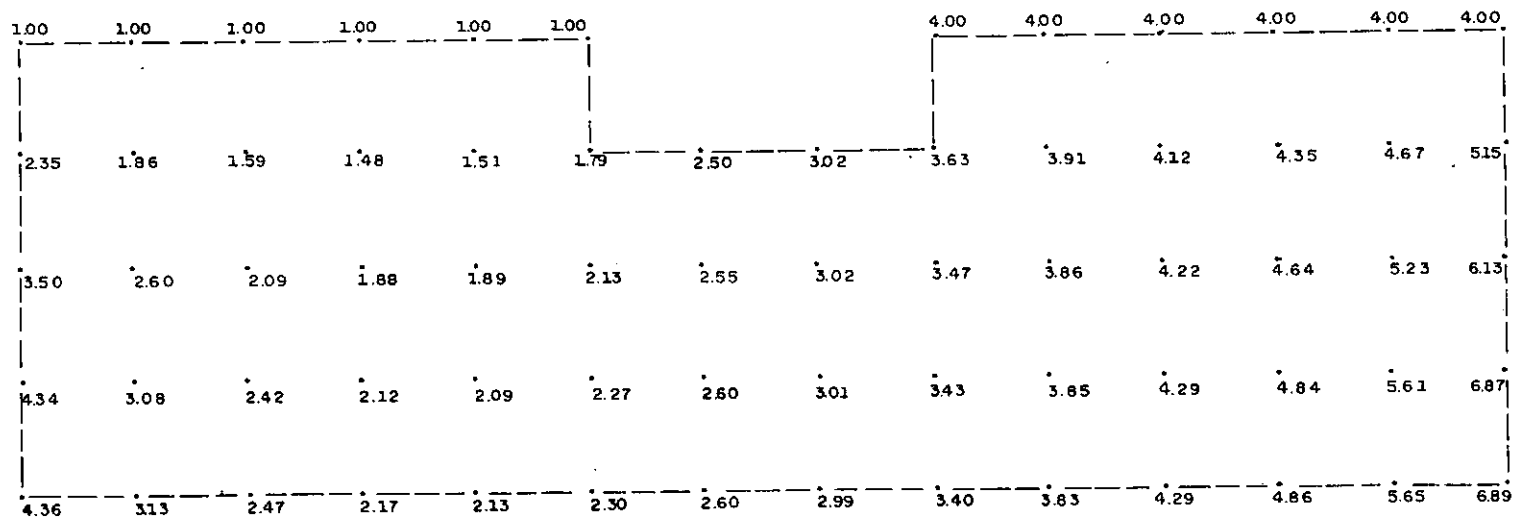
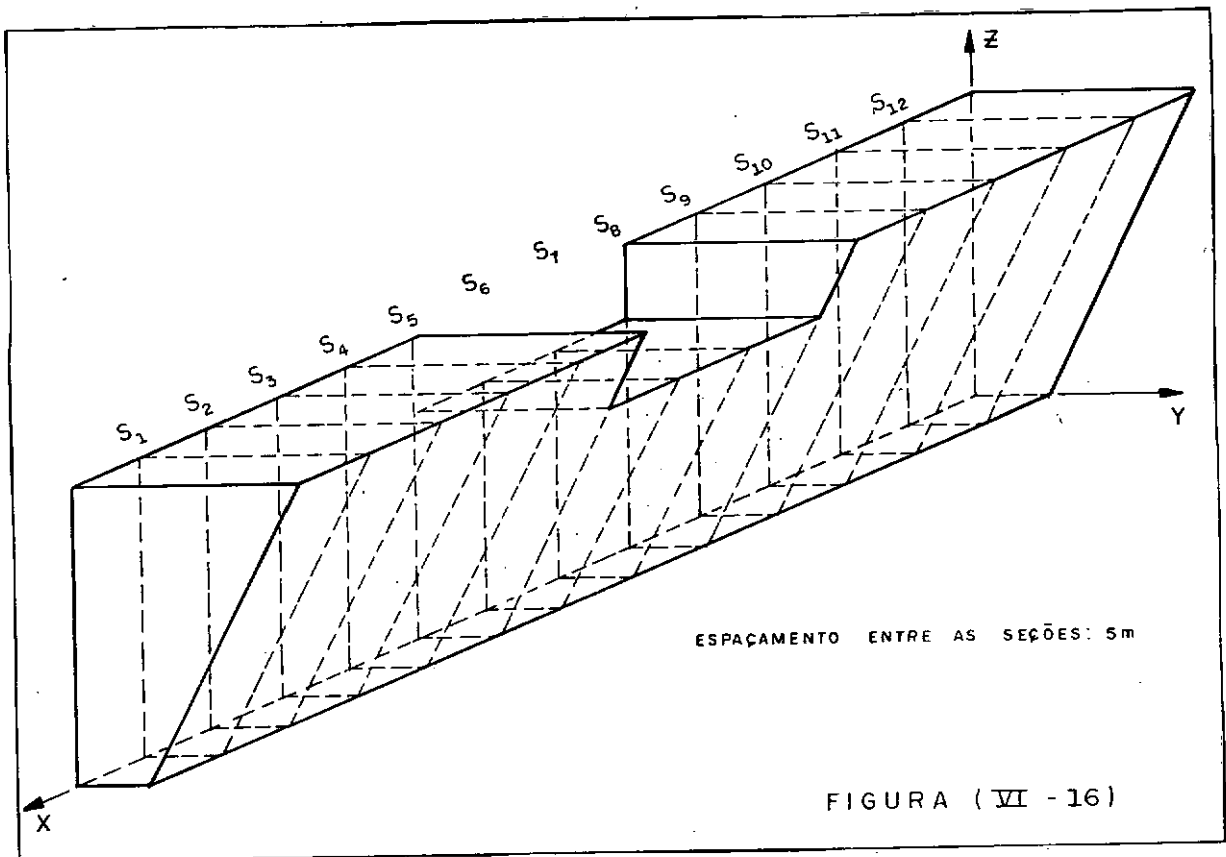


FIGURA (VI - 15)

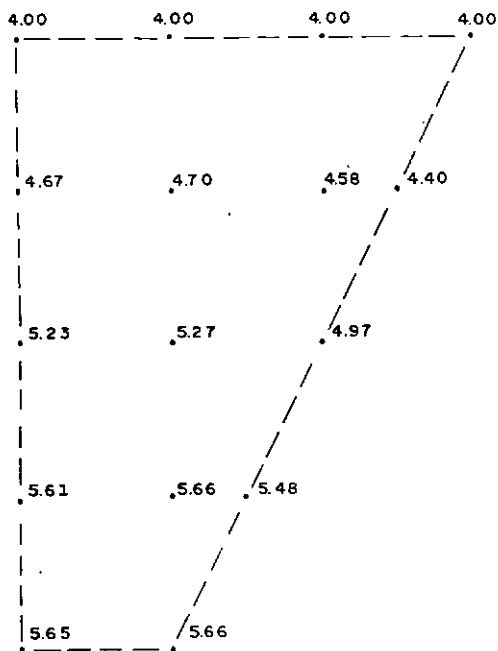
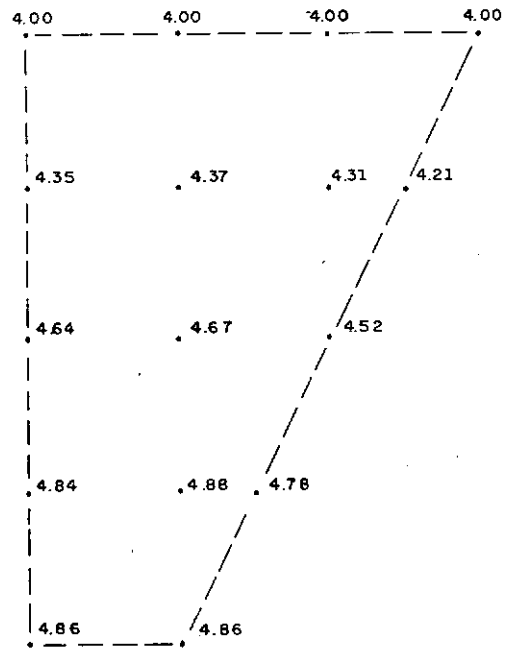
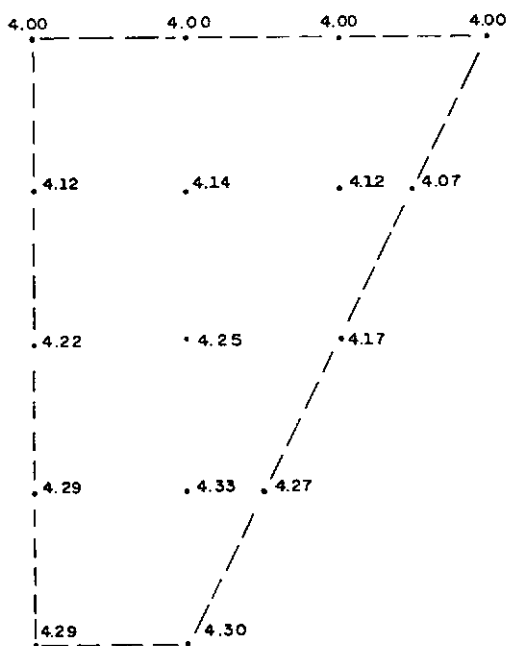
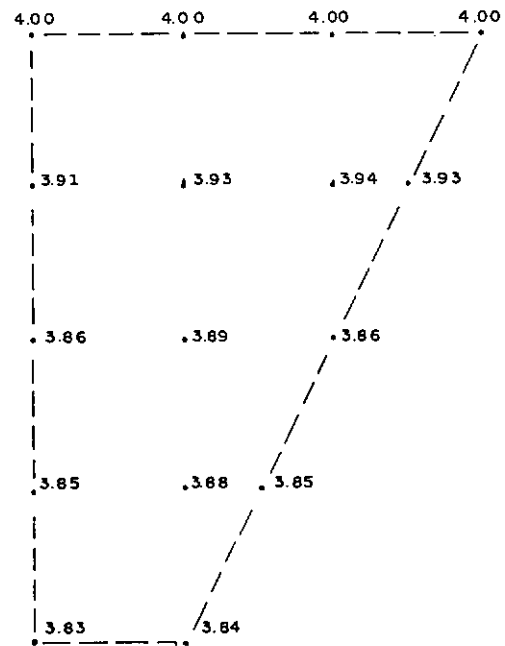
Como vemos, os resultados em pontos diretamente sob a barragem não se situam entre 1 e 4, como esperado, o que descaracteriza o fluxo suposto no sentido do maior para o menor potencial. A fim de tentarmos melhorar tais resultados seccionemos o domínio infinito por dois planos normais à direção x , por exemplo, a 20m das seções limites ($x=0$ e $x=65m$) da discretização anterior. Conservando as demais considerações feitas para a solução antecedente, teremos, na mesma superfície, os resultados mostrados na figura (VI-15).

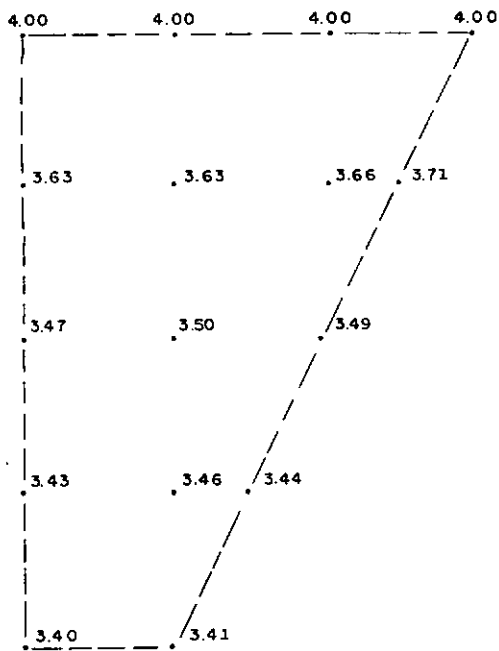
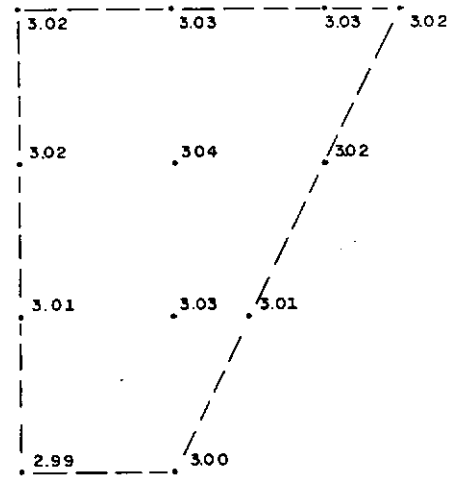
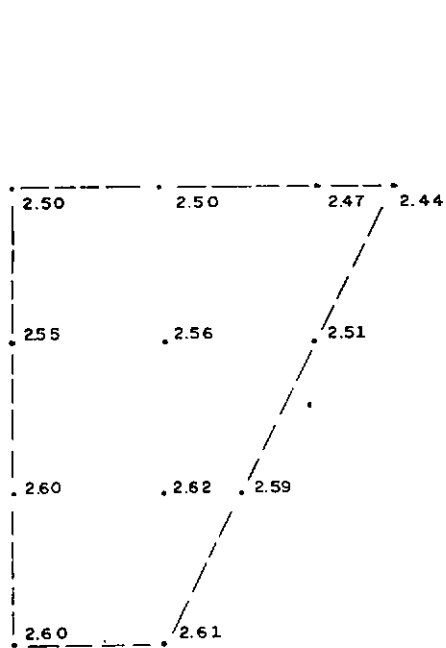
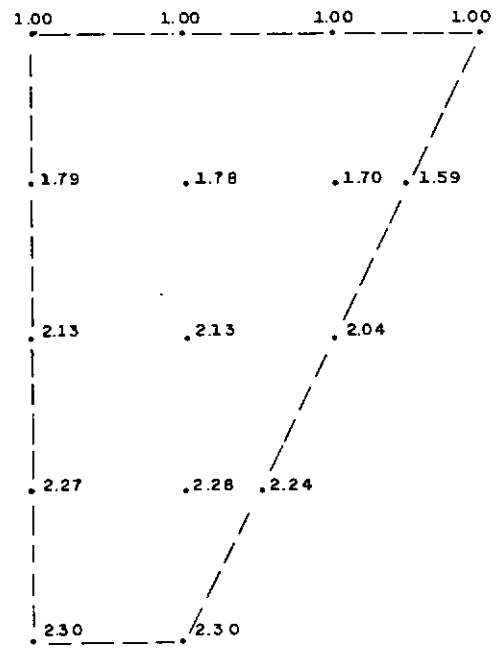
Como podemos observar, os resultados melhoraram consideravelmente embora ainda não possamos admitir que esta segunda solução seja totalmente satisfatória. Isto só será possível quando em duas soluções consecutivas (obtidas pelo afastamento contínuo dos planos limites normais ao eixo x), obtivermos valores muito próximos para os mesmos pontos situados em seções transversais localizadas nas proximidades da barragem.

Admitindo esta última solução, mostraremos os valores dos potenciais obtidos nas seções pontilhadas da figura (VI-16).



Estes valores são indicados na figura (VI-17) , sendo aqueles atribuídos aos pontos internos, como vimos , sujeitos a erros maiores.

SEÇÃO S₁SEÇÃO S₂SEÇÃO S₃SEÇÃO S₄

SEÇÃO S₅SEÇÃO S₆SEÇÃO S₇SEÇÃO S₈

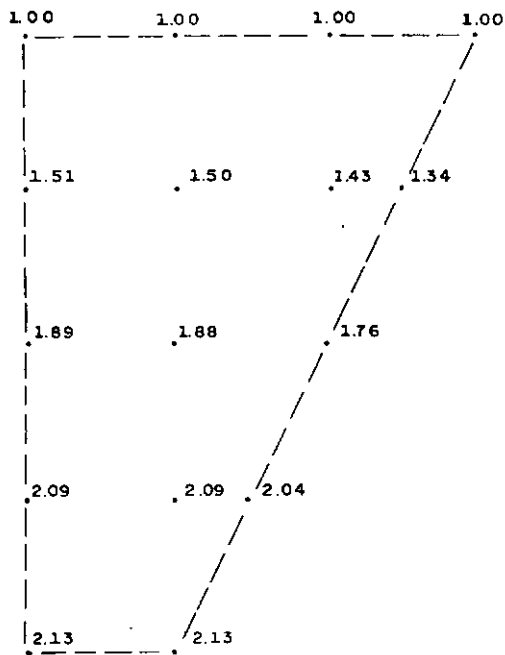
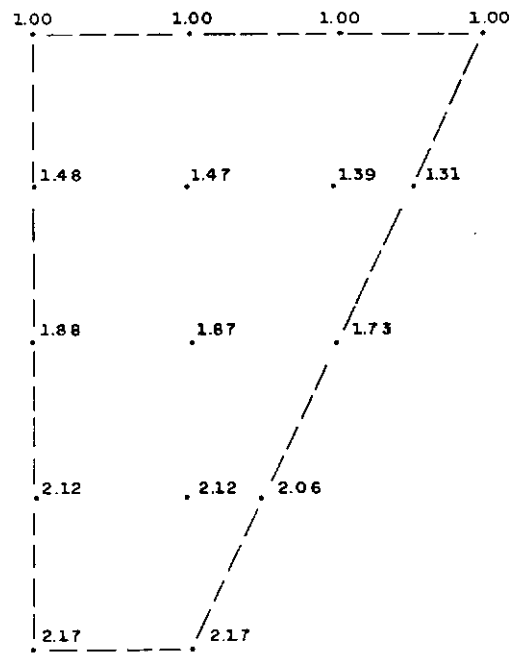
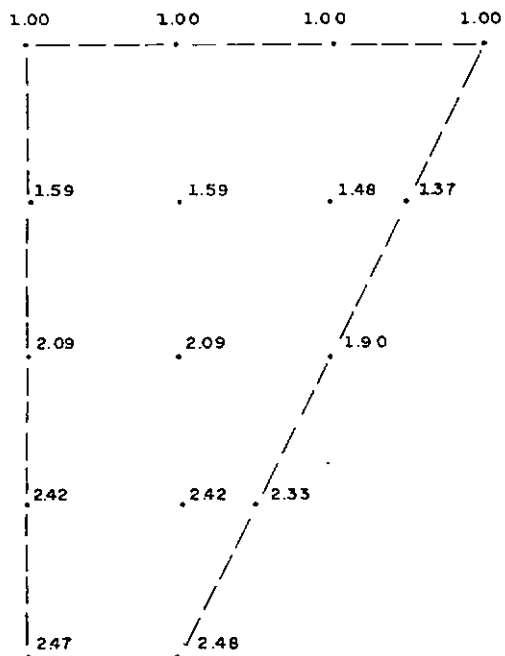
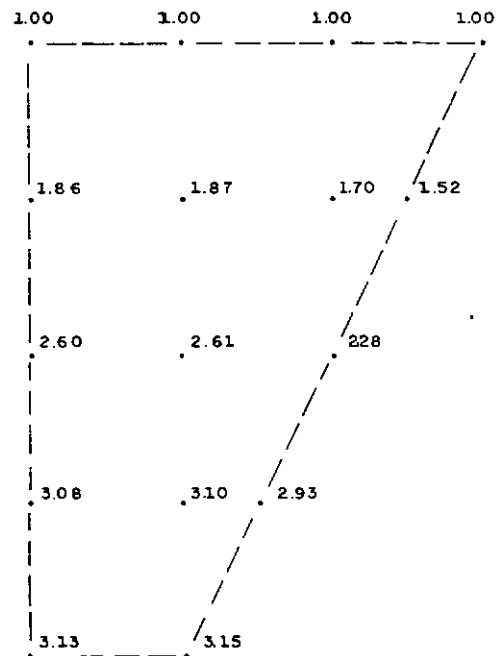
SEÇÃO S_9 SEÇÃO S_{10} SEÇÃO S_{11} SEÇÃO S_{12}

FIGURA (VI-17)

Os resultados assim indicados nos permitem ter uma idéia da distribuição do potencial (pressão) sob a barragem.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES

Muitos trabalhos têm sido apresentados dando conta da eficiência e da simplicidade do Método dos Elementos de Contorno aplicado a problemas de campo e de elasticidade. Tal fato nos leva a crer no sucesso deste Método se aplicado a outros tipos de problemas também comuns na Engenharia. Como vimos, constatamos a sua simplicidade perante os métodos de domínio, principalmente devida ao fato de trabalharmos apenas com o contorno (superfícies ou linhas limites) do domínio do problema, evitando maiores esforços, tanto do calculista como da máquina, na solução dos quesitos a que o método se propõe. A sua eficiência pode também ser verificada, em alguns exemplos mais simples onde podemos, antecipadamente, conhecer as suas soluções exatas, muito embora, envolvendo, ainda, algumas limitações.

No nosso estudo, isto é, na nossa proposta de aplicar o Método dos Elementos de Contorno aos problemas de campo tridimensionais em regime permanente, podemos constatar o quanto simples se torna a abordagem de tais problemas pelo método em questão. Devemos, porém, reconhecer a necessidade de impor continuidade a este estudo, se desejamos tornar o referido método competitivo em economia e eficiência com relação aos demais métodos existentes, já quase que totalmente desenvolvidos e experimentados. Verificamos, pois, a clara necessidade de estudos mais aprofundados cujos resultados nos permitam contornar a limitação que maior influência exerce sobre a solução de um dado problema que é a de não podermos introduzir nós múltiplos em pontos da discretização, situados numa região de descontinuidade geométrica, onde apenas o potencial é prescrito ou o gradiente em mais de uma direção é incógnito.

Embora o fato de algumas integrais serem soluções

nadas exatamente auxilie bastante na busca da exatidão para os resultados, a integração numérica, usada na solução da maioria das integrais que surgem no desenvolvimento, contribue negativamente para tal, devido a que o processo utilizado neste intento propõe-se, como vimos, a solucionar exatamente apenas integrais de funções polinomiais do sexto grau. Isto, entretanto, não chega a se constituir numa limitação tão relevante quanto a anteriormente citada. Porém, de qualquer forma, restringe o modelo no que diz respeito à eficiência na solução de um dado problema. Vimos, por exemplo, que no primeiro teste efetuado no elemento cúbico de arestas unitárias (capítulo V), onde esta se constitui na única limitação do modelo, os resultados apresentaram erros relativamente irrelevantes. No entanto, devemos considerar que o exemplo era o mais simples que podemos imaginar.

Um outro fator que, evidentemente, teremos a considerar no aprimoramento dos resultados, se relaciona com o tipo do elemento segundo o qual a superfície de contorno é discretizada. No nosso estudo, limitamos o desenvolvimento do método à consideração de elementos triangulares planos, sobre o qual supomos variar linearmente as funções que descrevem o potencial e o gradiente. É óbvio que se a superfície de contorno se demonstra com certa curvatura e/ou as ditas funções não são lineares (e sim, quadráticas, cúbicas, etc), os resultados são influenciados levando a solução a aproximações grosseiras. Isto pode ser constatado se verificarmos os erros relativos da Aplicação 1 do capítulo VI em comparação com os erros do citado exemplo do elemento cúbico apresentado no capítulo V. A distância que a solução numérica mantém da solução exata neste último caso é consideravelmente menor que no outro. A única justificativa nos parece ser o fato de discretizarmos superfícies curvas com elementos planos, o que, naturalmente, prejudica a solução, visto que a representação das superfícies não se procede corretamente.

Todavia, se ampliarmos o nosso estudo no sentido de complementá-lo visando as aplicações práticas mais co

muns, ou seja, introduzindo novos tipos de elementos segundo os quais o contorno deve ser discretizado, e, se conseguirmos superar de maneira satisfatória a limitação referente à introdução precisa das condições de contorno, teremos, certamente, um modelo bastante aprimorado e competitivo.

É bem verdade que muitas gestões ainda nos restam para que o Método dos Elementos de Contorno se torne um instrumento poderoso no tratamento dos muitos problemas que a Engenharia nos oferece, porém, é certo também que os resultados já conseguidos se constituem em grande incentivo à continuidade da pesquisa deste Método.

APÊNDICE

MANUAL DE UTILIZAÇÃO E LISTAGEM DO PROGRAMA

O programa é elaborado em linguagem FORTRAN pa
ra o computador B-6700 e resolve um problema de cada vez com
as seguintes limitações :

- a) Número máximo total de nós (no contorno e no inte
rior do domínio) = 2000,
- b) Número máximo de nós no interior do domínio = 1000,
- c) Número máximo de nós (no contorno ou no interior do
domínio) sem a utilização de memória auxiliar (gra
vação em disco) = 100,
- d) Número máximo de nós múltiplos = 100,
- c) Número máximo de elementos = 1500.

Observamos, contudo, que os limites acima estipu
lados podem se estender até os limites da máquina (em torno
de 65000) perante a simples modificação das dimensões dos ve
tores definidos no programa, sem qualquer alteração radical
na sua estrutura.

Os dados são introduzidos em grupos distintos de
cartões como segue :

Dados Gerais,

Coordenadas dos Nós no Contorno,

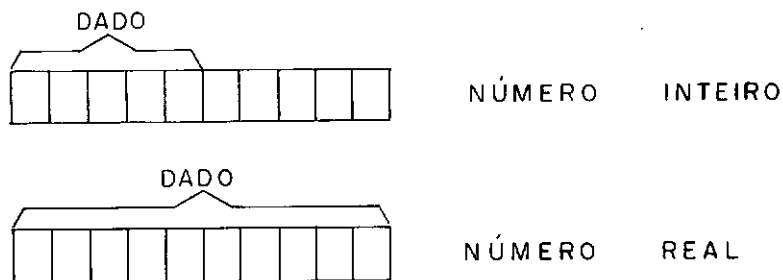
Incidência ou Conetividade dos Elementos,

Condições de Contorno,

Coordenadas dos Nós no Interior do Domínio.

Para a introdução destes dados cada cartão é di

vidido em faixas contendo cada uma 10 colunas, a partir da primeira e até, no máximo, a sexagésima coluna. Em cada faixa se introduz um dado (desde que ele seja um dado numérico) seguindo a orientação abaixo :

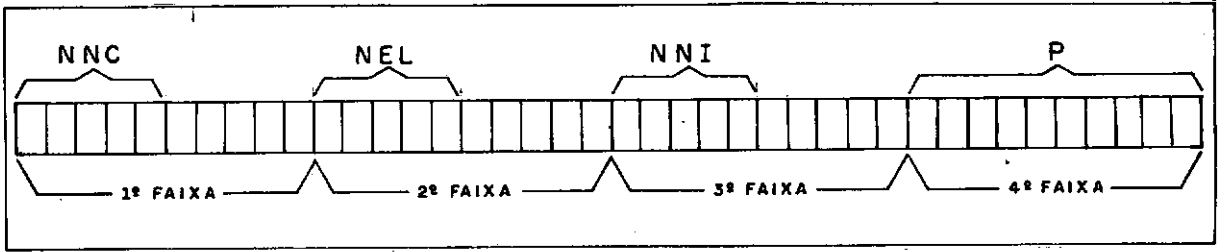


O dado numérico inteiro ocupa as cinco primeiras colunas de cada faixa (formato I5,5X) e o dado numérico real ocupa toda a faixa sendo que o ponto pode ser colocado em qualquer coluna (formato F10,0). Se o dado é alfa-numérico, ele ocupa total ou parcialmente a faixa a partir da coluna 1 até no máximo a coluna 60, conforme já esclarecido.

1) Dados Gerais :

Este grupo de dados se constitui de 5 cartões em que constam, na ordem :

- Título do Programa : 2 cartões em caracteres alfa- numéricos até a coluna 60, no máximo, identificando o problema a ser resolvido.
- Potencial Considerado : 1 cartão com caracteres alfa-numéricos até, no máximo, a coluna 36, possuindo o nome do potencial (temperatura, pressão, etc).
- Derivada do Potencial : 1 cartão com caracteres alfa-numéricos até, no máximo, a coluna 36, possuindo o nome do gradiente (gradiente de temperatura, gradiente hidráulico , etc).
- Dados Preliminares : 1 cartão com caracteres numéricos até a coluna 40, contendo, na ordem, o número de nós no contorno (NNC), o número de elementos (NEL), o número de nós no interior do domínio (NNI) e o valor da constante p da equação $\nabla^2 u + p = 0$ (P), como indicado abaixo :

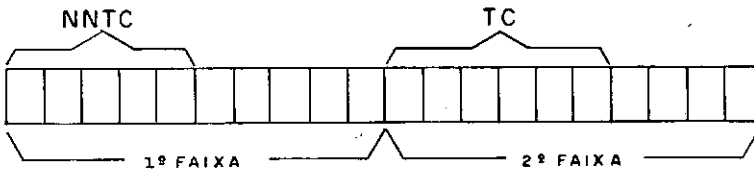


As variáveis NNC, NEL e NNI são inteiras enquanto P é real.

2) Coordenadas dos Nós no Contorno :

As coordenadas podem ser cartesianas, cilíndricas ou esféricas, sendo que nos dois últimos casos os ângulos podem ser dados em graus ou radianos. O número total de cartões, neste grupo, depende de como são introduzidas estas coordenadas, sendo a regra básica, a que segue :

a) Definição do Número de Nós num Tipo de Coordenada : 1 cartão contendo duas variáveis (a primeira numérica e a segunda alfa-numérica), que são, na ordem, o número de nós cujas coordenadas são dadas num certo tipo (NNTC) e o tipo de coordenada desses nós (TC), como indicado abaixo :

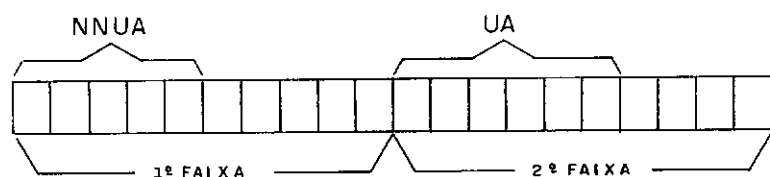


A variável NNTC é inteira e TC é alfa-numérica possuindo, no mínimo, 6 caracteres na forma :

CARTES, se as coordenadas são cartesianas;
 CILIND, se as coordenadas são cilíndricas;
 ESFERI, se as coordenadas são esféricas.

b) Definição da Unidade do Ângulo : 1 cartão com as mesmas características do anterior, contendo o número de nós do tipo de coordenada definido, cujas coordenadas angulares são dadas numa certa unidade (NNUA) e a unidade desses ângulos

(UA), como indicado abaixo :



A variável NNUA é inteira e UA é alfa-numérica possuindo, no mínimo, 6 caracteres na forma :

GRAUS \emptyset , se a unidade é grau;

RADIAN, se a unidade é radiano.

Observações : 1) O símbolo \emptyset significa que aquela coluna de ve ser deixada em branco.

2) Se as coordenadas são cartesianas, este cartão não deve existir.

c) Coordenadas dos Nós : Um número de cartões igual a NNTC quando as coordenadas são cartesianas, ou igual a NNUA em caso contrário, cada um deles com 4 variáveis numéricas (cada uma ocupando uma faixa de 10 caracteres), que são, na ordem, o número do nó e as três coordenadas relativas a um sistema ortogonal de eixos qualquer. Se as coordenadas são cartesianas estas três variáveis são dadas na ordem X,Y, Z; se são cilíndricas, na ordem r, θ, z , conforme a figura (A-1); e se são esféricas, na ordem r, θ, ψ , conforme a figura (A-2).

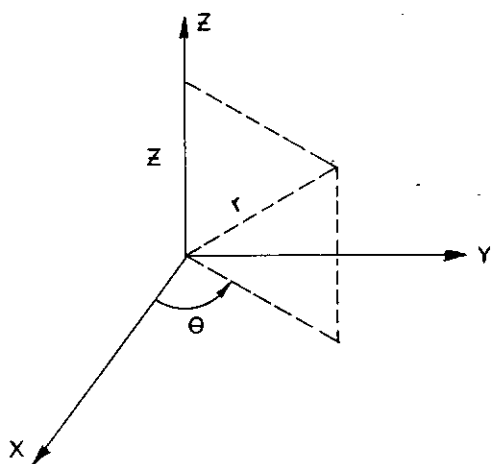


FIGURA (A-1)

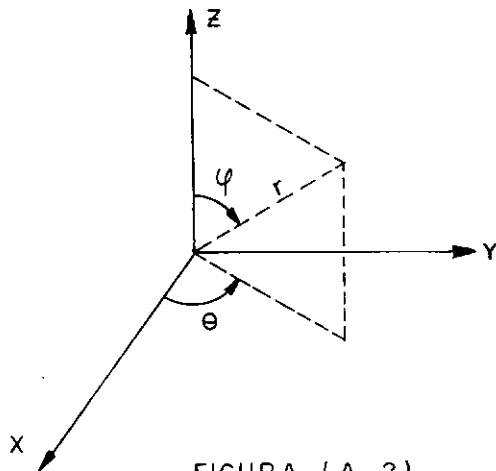


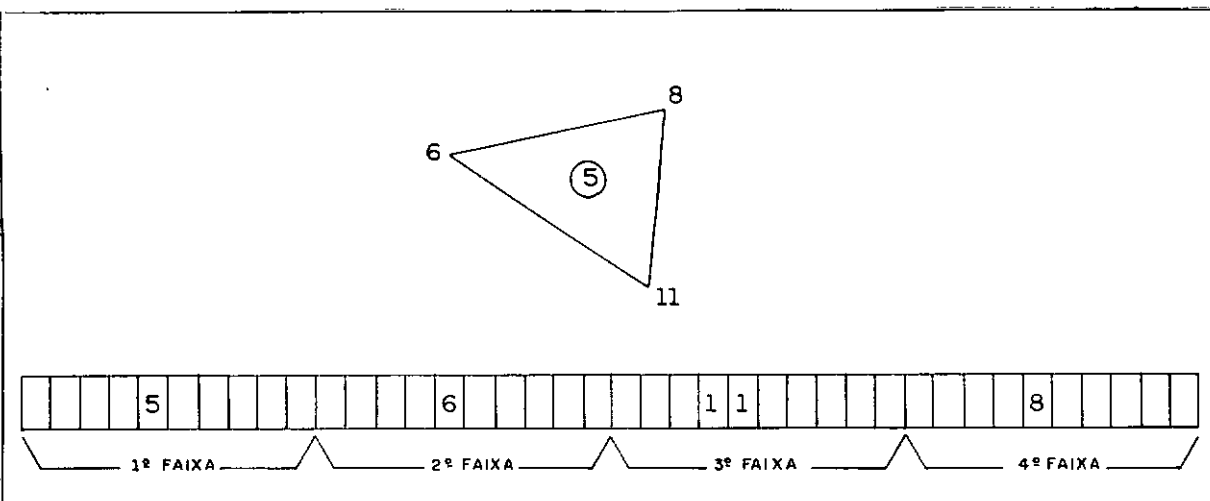
FIGURA (A-2)

O número do nó é uma variável inteira, enquanto as coordenadas são reais.

A sequência descrita é repetida cada vez que se muda o tipo de coordenada até que sejam introduzidas as posições de todos os nós. A ordem de introdução dos nós com as suas coordenadas não obedece a nenhuma restrição.

3) Conetividade dos Elementos :

Os elementos são triangulares planos sendo definidos por 3 nós situados nos seus vértices. Neste grupo, o número de cartões é idêntico ao número de elementos e em cada um constam 4 variáveis inteiras que são o número do elemento e os 3 nós situados nos seus vértices, dados no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio, como ilustra o exemplo a seguir :



Os cartões não precisam ser colocados na ordem natural dos elementos.

4) Condições de Contorno :

A condição de contorno em cada nó é o potencial ou a derivada previamente conhecida naquele nó. O modelo desenvolvido exige o conhecimento prévio de pelo menos um desses valores em cada nó. Se num ponto de descontinuidade geométrica conhecemos mais de um valor do gradiente, introduzimos nós múltiplos da maneira já descrita no texto. Este

grupo possui um número de cartões idêntico ao número de nós no contorno (NNC) contendo, cada um, três variáveis (uma numérica inteira, uma alfa-numérica e outra numérica real) que são, na ordem, o número do nó do contorno, a identificação da condição de contorno (potencial ou derivada) e o seu valor. A segunda faixa será preenchida da coluna 11 até a coluna 16 com :

POTENC, se o valor prescrito é o do potencial, ou
DERIVA, se o valor prescrito é o do gradiente.

As demais colunas desta faixa podem ser ou não preenchidas. Por exemplo, se no nó 43 o potencial é prescrito igual a 10, poderemos ter o cartão preenchido como segue :



Também, neste grupo, a ordem de disposição dos cartões é qualquer.

5) Coordenadas dos Nós no Interior do Domínio :

As considerações para este grupo de cartões são as mesmas feitas para as coordenadas dos nós no contorno.

Saída do Programa :

A saída do programa consta de duas partes, na primeira delas encontrando-se a impressão dos dados introduzidos e na segunda a impressão dos resultados. Na impressão dos dados constam ainda o número de pontos de integração (igual a 12) utilizados sobre o elemento triangular no processo de integração numérica, e a área de cada elemento calculada no programa. Esta primeira parte da saída do programa tem a finalidade de assegurar ao usuário a oportunidade de conferir se os dados foram ou não corretamente fornecidos.

Na impressão dos resultados constam, inicialmente, os potenciais e derivadas dadas e calculadas dos nós do contorno, e, posteriormente, os potenciais calculados nos nós do interior do domínio, quando estes existem. Se não introduzimos nós internos, o programa emite mensagem alusiva a tal fato, bem como, se alguns enganos (já levantados no texto) são cometidos ao se criar o arquivo de dados. Nestes últimos casos o programa é automaticamente interrompido após a emissão da mensagem.

Nas páginas seguintes encontramos, a título de ilustração, o arquivo de dados do primeiro exemplo do cubo apresentado no capítulo V e, a seguir, a listagem completa do programa.

TESTE DO CUBO

TRANSFERENCIA DE CALOR

TEMPERATURA

GRADIENTE DE TEMPERATURA

16	12	7	Ø.
----	----	---	----

16	CARTESIANAS		
----	-------------	--	--

1	1.	Ø.	1.
---	----	----	----

2	1.	Ø.	Ø.
---	----	----	----

3	1.	1.	1.
---	----	----	----

4	1.	1.	Ø.
---	----	----	----

5	Ø.	1.	1.
---	----	----	----

6	Ø.	1.	Ø.
---	----	----	----

7	Ø.	Ø.	1.
---	----	----	----

8	Ø.	Ø.	Ø.
---	----	----	----

9	1.	Ø.	1.
---	----	----	----

1Ø	Ø.	Ø.	1.
----	----	----	----

11	1.	1.	1.
----	----	----	----

12	Ø.	1.	1.
----	----	----	----

13	1.	Ø.	Ø.
----	----	----	----

14	Ø.	Ø.	Ø.
----	----	----	----

15	1.	1.	Ø.
----	----	----	----

16	Ø.	1.	Ø.
----	----	----	----

1	1	2	4
---	---	---	---

2	1	4	3
---	---	---	---

3	3	4	6
---	---	---	---

4	3	6	5
---	---	---	---

5	5	6	7
---	---	---	---

6	7	6	8
---	---	---	---

7	7	8	1
---	---	---	---

8	1	8	2
---	---	---	---

9	1Ø	9	11
---	----	---	----

1Ø	1Ø	11	12
----	----	----	----

11	13	14	15
----	----	----	----

12	15	14	16
----	----	----	----

1	DERIVADA	Ø.
---	----------	----

2	DERIVADA	Ø.
---	----------	----

3	DERIVADA	Ø.
---	----------	----

4	DERIVADA	Ø.
---	----------	----

5	DERIVADA	Ø.
---	----------	----

6	DERIVADA	Ø.	
7	DERIVADA	Ø.	
8	DERIVADA	Ø.	
9	POTENCIAL	1Ø.	
1Ø	POTENCIAL	1Ø.	
11	POTENCIAL	1Ø.	
12	POTENCIAL	1Ø.	
13	POTENCIAL	Ø.	
14	POTENCIAL	Ø.	
15	POTENCIAL	Ø.	
16	POTENCIAL	Ø.	
7	CARTESIANAS		
1	Ø.5	Ø.5	Ø.5
2	Ø.5	Ø.25	Ø.5
3	Ø.5	Ø.75	Ø.5
4	Ø.75	Ø.5	Ø.5
5	Ø.25	Ø.5	Ø.5
6	Ø.5	Ø.5	Ø.75
7	Ø.5	Ø.5	Ø.25


```

C      F      - INICIALMENTE POTENCIAIS E DERIVADAS CALCULADAS
C              E, POSTERIORMENTE, DERIVADAS DADAS E CALCULADAS
C      PI      - POTENCIAIS CALCULADOS NOS PONTOS INTERNOS
C      VG,VH    - VETORES QUE COMPORTAM OS ELEMENTOS DAS MATRIZES
C              "G" E "H" QUE COMPOEM O SISTEMA "HU = GQ"
C      QSI      - COORDENADAS TRIANGULARES DOS PONTOS DE INTEGRACAO
C      OME      - CONSTANTES-PESO DOS PONTOS DE INTEGRACAO
C
C
C

```

```

C *****

```

```

C      P R O G R A M A      P R I N C I P A L

```

```

C *****

```

```

C

```

```

COMMON

```

```

-      /B001/      P,NNI
-      /B002/      II,NNC
-      /B003/      NNE,NEL
-      /B004/      NTLR,NC
-      /B005/      GG(3),HH(3),K(3)
-      /B006/      IG,NIL,II,NL,FIM
-      /B007/      QSI(12,3),OME(12)

```

```

DIMENSION

```

```

-      X(2000),Y(2000),Z(2000),CON(4500),CC1(2000),POT(2000),
-      F(2000),PI(1000),VG(30625),VH(30625),IND(2000),IR(2000),
-      ARE(1500),NOR(4500),CS(100,2),FF(2000)

```

```

INTEGER

```

```

-      CON,CS

```

```

REAL

```

```

-      NOR

```

```

C

```

```

C

```

```

C

```

```

INDICES DE LEITURA E IMPRESSAO

```

```

IL   = 5

```

```

II   = 6

```

```

C

```

```

C

```

```

IMPRESSAO DO CABECALHO

```

```

C      WRITE(II,1000)
C
C      NUMERO DE NOS POR ELEMENTO
C
C      NNE = 3
C
C      NUMERO TOTAL DE LINHAS "REPETIDAS" E COLUNAS A SEREM SOMADAS
C
C      NTLR = 100
C      NC   = 2
C
C      LEITURA E IMPRESSAO DOS DADOS
C
C      CALL DADOS (X,Y,Z,CON,CC1,POT,IL,ARE,NOR)
C
C      TDADOS = TIME(2)
C
C      COMPOSICAO DAS MATRIZES "G" E "H" ALOCADAS NOS VETORES "VG" E "VH"
C
C      CALL INDIC (X,Y,Z,CC1,IR,NLR,NNC,CS,IND)
C      CALL FMAIR (X,Y,Z,CON,CC1,POT,F,VG,VH,NLR,P,ARE,NOR,CS,FF)
C
C      IFMAIR = TIME(2)
C
C      SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES PELO METODO DE GAUSS
C
C      CALL GAUSS (VG,VH,F,IND,IR,NLR,CC1,POT,X,Y,Z)
C
C      TGAUSS = TIME(2)
C
C      CALCULO DOS POTENCIAIS NOS PONTOS INTERNOS
C
C      IF(NNI .EQ. 0) GO TO 100
C      CALL INTER (X,Y,Z,CON,POT,F,PI,VG,VH,ARE,NOR,FF)
C

```

```

100 TINTER = TIME(2)
C
C   IMPRESSAO DOS RESULTADOS
C
C   CALL SAIDA (POT,F.PI,NNI)
C
C   CALCULO E IMPRESSAO DOS TEMPOS DE EXECUCAO
C
TOTAL = TIME(2) / 60
TSAIDA = (TIME(2) - TINTER) / 60
TINTER = (TINTER - TGAUSS) / 60
TGAUSS = (TGAUSS - TFMATR) / 60
TFMATR = (TFMATR - TDADOS) / 60
TDADOS = TDADOS / 60
WRITE(11,1100) TDADOS,TFMATR,TGAUSS,TINTER,TSAIDA,TOTAL
STOP
1000 FORMAT(20(/),20X,56(' '),20(/20X,' ',54X,' ')/20X,' ',5X,'PROGRAMA
- PARA ANALISE DE PROBLEMAS DE CAMPO',6X,' ',20(/20X,' ',54X,' ')/20X
-,56(' '),20(/20X,' ',54X,' ')/20X,' ',11X,'METODO DOS ELEMENTOS DE
- CONJUNTO',11X,' ',20(/20X,' ',54X,' ')/20X,56(' '),20(/20X,' ',54X,'
- ')/20X,' ',5X,'CARACTERISTICAS:',33X,' '/20X,' ',54X,' '/20X,' ',
- 21X,'DOMINIO TRIDIMENSIONAL',11X,' '/20X,' ',54X,' '/20X,' ',21X,'E
- LEMENTOS TRIANGULARES',11X,' '/20X,' ',31X,'COM VARIACAO LINEAR',4
- X,' ',20(/20X,' ',54X,' ')/20X,56(' '),20(/20X,' ',54X,' ')/20X,' ',
- 5X,'PROGRAMA DE ENGENHARIA CIVIL - COPPE/UFRJ',8X,' '/20X,' ',54X,'
- ' '/20X,' ',5X,'TESE DE MESTRADO - 1979',26X,' ',20(/20X,' ',54X,'
- ')/20X,' ',5X,'AUTOR:',43X,' '/20X,' ',54X,' '/20X,' ',11X,'PEDRO
- AUGUSTO CEZAR OLIVEIRA DE SA',9X,' ',20(/20X,' ',54X,' ')/20X,' ',
- 5X,'ORIENTADOR:',38X,' '/20X,' ',54X,' '/20X,' ',16X,'ANDRES LUOV
- ICO HALBRITTER',12X,' ',20(/20X,' ',54X,' ')/20X,56(' ')/1H1)
1100 FORMAT(1H1,26(/),24X,48(' ')/24X,' ',46X,' '/24X,' ',5X,'TEMPOS DE
- PROCESSAMENTO DO PROGRAMA',6X,' '/24X,' ',46X,' '/24X,48(' ')/24X
-,',46X,' '/24X,' ',X,'UNIDADE: SEGUNDOS',28X,' '/24X,' ',46X,' '
-/24X,48(' ')/24X,' ',32X,' ',13X,' '/24X,' ',X,'SEGMENTO DO PROGRA
- MA',11X,' ',4X,'TEMPO',4X,' '/24X,' ',32X,' ',13X,' '/24X,48(' ')/
- 24X,' ',32X,' ',13X,' '/24X,' ',X,'LEITURA E IMPRESSAO DE DADOS',3

```

```

-X,'+',X,F10.3,2X,'/'24X,'+',32X,'+',13X,'/'24X,'+',X,'FORMACAO D
-AS MATRIZES',10X,'+',X,F10.3,2X,'/'24X,'+',32X,'+',13X,'/'24X,'+
-'X,'SOLUCAO DO SISTEMA DE EQUACOES',X,'+',X,F10.3,2X,'/'24X,'+',
-32X,'+',13X,'/'24X,'+',X,'POTENCIAIS NOS PONTOS INTERNOS',X,'+',X
-,F10.3,2X,'/'24X,'+',32X,'+',13X,'/'24X,'+',X,'IMPRESSAO DE RESU
-LTADOS',8X,'+',X,F10.3,2X,'/'24X,'+',32X,'+',13X,'/'24X,48('+'')/
-24X,'+',32X,'+',13X,'/'24X,'+',13X,'TOTAL',14X,'+',X,F10.3,2X,'+'
-/24X,'+',32X,'+',13X,'/'24X,48('+''))
END

```

SUBROUTINE DADOS (X,Y,Z,CON,CC1,POT,IL,ARE,NOR)

C

C*****

C SUBROTINA PARA LEITURA E IMPRESSAO DE DADOS

C*****

C

COMMON

- /B001/ P,NNI
- /B002/ II,MNC
- /B003/ NNE,NEL
- /B007/ OSI(12,3),OME(12)

DIMENSION

- X(1),Y(1),Z(1),CON(1),CC1(1),POT(1),
- CC2(2000),TP(20),PC(6),DP(6),ARE(1),NOR(1)

INTEGER

- CON

REAL

- NOR

C

C LEITURA E IMPRESSAO DO TITULO DO PROGRAMA

C

READ(IL,1000) TP

WRITE(II,1100) TP

C

C LEITURA E IMPRESSAO DO NOME DO POTENCIAL CONSIDERADO

C

READ(IL,1200) PC

WRITE(II,1300) PC

C

C LEITURA E IMPRESSAO DO NOME DA DERIVADA DO POTENCIAL

C

READ(IL,1200) DP

WRITE(II,1400) DP

C

C LEITURA E IMPRESSAO DE MNC,NEL,NNI,NPI,P

C


```

READ(IL,1500)  NNC,NEL,NNI,P
NPI = 12
WRITE(II,1600) NNC,NEL,NNI,NPI,P

```

```

VALORES DAS COORDENADAS TRIANGULARES E DAS CONSTANTES-PESO
      PARA OS 12 PONTOS DE INTEGRACAO

```

```

CALL PESOS

```

```

LEITURA E IMPRESSAO DAS COORDENADAS DOS NOS DO CONTORNO

```

```

WRITE(II,1700)
CALL COORD (X,Y,Z,NNC,0,IL,II)

```

```

LEITURA E IMPRESSAO DA CONETIVIDADE DOS ELEMENTOS

```

```

WRITE(II,1800)
ILI = 4
DO 100 I = 1,NEL
  READ(IL,1900)  J,(CON(L), L = NNE*(J-1)+1, NNE*J)
  AUX = NNE * J
  K1 = CON(AUX-2)
  K2 = CON(AUX-1)
  K3 = CON(AUX)
  X1 = X(K1)
  X2 = X(K2)
  X3 = X(K3)
  Y1 = Y(K1)
  Y2 = Y(K2)
  Y3 = Y(K3)
  Z1 = Z(K1)
  Z2 = Z(K2)
  Z3 = Z(K3)
  CALL AREAS (X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3,Z1,Z2,Z3,A,B,C,AREA,II,J)
  ARE(J) = AREA
  NDR(AUX-2) = A

```

```

        NOR(AUX-1) = B
        NOR(AUX)   = C
100 CONTINUE
    DO 110 I = 1,NEL
        WRITE(II,2000) I,(CON(L), L = NNE*(I-1)+1, NNE*I),ARE(I)
        ILI = ILI + 1
        IF(ILI .NE. 40) GO TO 110
        WRITE(II,2100)
        ILI = 0

```

```

110 CONTINUE

```

C
C
C

```

    LEITURA E IMPRESSAO DAS CONDICÕES DE CONTOURNO

```

```

    WRITE(II,2200)
    ILI = 4
    DO 120 I = 1,NNC
        READ(IL,2300) J,CC1(J),CC2(J),POT(J)
        IF(CC1(J) .IS. 'POTENC') GO TO 120
        IF(CC1(J) .IS. 'DERIVA') GO TO 120
        WRITE(II,2400) J
        STOP

```

```

120 CONTINUE

```

```

    DO 130 I = 1,NNC
        WRITE(II,2500) I,CC1(I),CC2(I),POT(I)
        ILI = ILI + 1
        IF(ILI .NE. 40) GO TO 130
        WRITE(II,2100)
        ILI = 0

```

```

130 CONTINUE

```

C
C
C

```

    LEITURA E IMPRESSAO DAS COORDENADAS DOS NOS INTERNOS

```

```

    IF (NNI .EQ. 0) GO TO 140
    WRITE(II,2600)
    CALL COORD (X,Y,Z,NNI,NNC,IL,II)
    GO TO 150

```

```

140 WRITE(II,2700)
150 RETURN
1000 FORMAT(10A6/10A6)
1100 FORMAT(25(/),2(//20X,10A6))
1200 FORMAT(6A6)
1300 FORMAT(////20X,'POTENCIAL CONSIDERADO:',2X,6A6)
1400 FORMAT(/20X,'DERIVADA DO POTENCIAL:',2X,6A6)
1500 FORMAT(3(I5,5X),F10.0)
1600 FORMAT(////20X,'DAOS DO PROGRAMA'////
-           20X,'NUMERO DE NOS NO CONTORNO'           =' ,8X,I5//
-           20X,'NUMERO DE ELEMENTOS'                 =' ,8X,I5//
-           20X,'NUMERO DE NOS NO INTERIOR DO DOMINIO'=' ,8X,I5//
-           20X,'NUMERO DE PONTOS DE INTEGRACAO'       =' ,8X,I5//
-           20X,'VALOR DA CONSTANTE P'                =' ,X,E12.5)
1700 FORMAT(1H1///20X,'COORDENADAS DOS NOS DO CONTORNO')
1800 FORMAT(1H1///20X,'CONETIVIDADE DOS ELEMENTOS'
-           ///20X,'ELEMENTO',16X,'NOS',25X,'AREA'/)
1900 FORMAT(4(I5,5X))
2000 FORMAT(/23X,I5,6X,3(I5,3X),6X,E12.5)
2100 FORMAT(1H1//)
2200 FORMAT(1H1///20X,'CONDICOES DE CONTORNO'
-           ///26X,'NO',33X,'VALOR PRESCRITO'/)
2300 FORMAT(I5,5X,A6,A4,F10.0)
2400 FORMAT(////30X,'O TIPO DE CONDICAO DE CONTORNO DO NO',X,I5//32X,'
-NAO ESTA PREVISTO NESTE PROGRAMA.'//36X,'ESCOLHA POTENCIAL OU DERI
-VADA.'//34X,5(' '), 'PROGRAMA ENCERRADO',5(' '))
2500 FORMAT(/23X,I5,13X,A6,A4,13X,E12.5)
2600 FORMAT(1H1///20X,'COORDENADAS DOS PONTOS NO INTERIOR DO DOMINIO')
2700 FORMAT(///27X,'NAO FOI SOLICITADO O CALCULO DO POTENCIAL',//32X,
- 'EM PONTOS NO INTERIOR DO DOMINIO')
END

```

SUBROUTINE PESOS

C

C*****

C SUBROTINA PARA FIXACAO DAS COORDENADAS TRIANGULARES E DOS PESOS

C*****

C

COMMON

- /B007/ QSI(12,3),UME(12)

C

C

VALORES DAS COORDENADAS TRIANGULARES E DOS PESOS

C

QSI(1,1) = 0.873821971016996

QSI(1,2) = 0.063089014491502

QSI(1,3) = QSI(1,2)

QSI(2,1) = QSI(1,2)

QSI(2,2) = QSI(1,1)

QSI(2,3) = QSI(1,2)

QSI(3,1) = QSI(1,2)

QSI(3,2) = QSI(1,2)

QSI(3,3) = QSI(1,1)

QSI(4,1) = 0.501426509658179

QSI(4,2) = 0.249286745170910

QSI(4,3) = QSI(4,2)

QSI(5,1) = QSI(4,2)

QSI(5,2) = QSI(4,1)

QSI(5,3) = QSI(4,2)

QSI(6,1) = QSI(4,2)

QSI(6,2) = QSI(4,2)

QSI(6,3) = QSI(4,1)

QSI(7,1) = 0.636502499121399

QSI(7,2) = 0.310352451033785

QSI(7,3) = 0.053145049844816

QSI(8,1) = QSI(7,2)

QSI(8,2) = QSI(7,3)

QSI(8,3) = QSI(7,1)

QSI(9,1) = QSI(7,3)

```

QSI(9,2)  = QSI(7,1)
QSI(9,3)  = QSI(7,2)
QSI(10,1) = QSI(7,1)
QSI(10,2) = QSI(7,3)
QSI(10,3) = QSI(7,2)
QSI(11,1) = QSI(7,3)
QSI(11,2) = QSI(7,2)
QSI(11,3) = QSI(7,1)
QSI(12,1) = QSI(7,2)
QSI(12,2) = QSI(7,1)
QSI(12,3) = QSI(7,3)
OME(1)    = 0.050844906370207
OME(2)    = OME(1)
OME(3)    = OME(1)
OME(4)    = 0.116786275726379
OME(5)    = OME(4)
OME(6)    = OME(4)
OME(7)    = 0.082851075618374
OME(8)    = OME(7)
OME(9)    = OME(7)
OME(10)   = OME(7)
OME(11)   = OME(7)
OME(12)   = OME(7)
RETURN
END

```

SUBROUTINE CORD (X,Y,Z,NNCI,M,IL,II)

C

C*****

C SUBROTINA PARA CALCULO DAS COORDENADAS DOS NOS

C*****

C

DIMENSION

- X(1),Y(1),Z(1)

AUX1 = 0.

ILI = 2

100 READ(IL,1000) NNTC,TC

IF(TC .IS. 'CARTES') GO TO 110

IF(TC .IS. 'CILIND') GO TO 130

IF(TC .IS. 'ESFERI') GO TO 200

WRITE(II,1100)

STOP

110 WRITE(II,1200)

ILI = ILI + 3

DO 120 I = 1,NNTC

READ (IL,1300) J,X(J+M),Y(J+M),Z(J+M)

WRITE(II,1400) J,X(J+M),Y(J+M),Z(J+M)

ILI = ILI + 1

IF(ILI .NE. 40) GO TO 120

WRITE(II,2000)

ILI = 0

120 CONTINUE

AUX1 = AUX1 + NNTC

ILI = 0

IF(AUX1 .EQ. NNCI) GO TO 280

GO TO 100

130 AUX2 = 0.

140 READ(IL,1000) NNUA,UA

IF(UA .IS. 'GRAUS ') GO TO 150

IF(UA .IS. 'RADIAN') GO TO 170

GO TO 220

150 WRITE(II,1500)

```

      ILI = ILI + 3
      DO 160 I = 1, NNUA
        READ (IL,1300) J,X(J+M),Y(J+M),Z(J+M)
        WRITE(II,1400) J,X(J+M),Y(J+M),Z(J+M)
        Y(J+M) = Y(J+M) * 3.14159265358 / 180
        R      = X(J+M)
        X(J+M) = R * COS(Y(J+M))
        Y(J+M) = R * SIN(Y(J+M))
        ILI = ILI + 1
        IF(ILI .NE. 40) GO TO 160
        WRITE(II,2000)
        ILI = 0
160  CONTINUE
      GO TO 190
170  WRITE(II,1600)
      ILI = ILI + 3
      DO 180 I = 1, NNUA
        READ (IL,1300) J,X(J+M),Y(J+M),Z(J+M)
        WRITE(II,1400) J,X(J+M),Y(J+M),Z(J+M)
        R      = X(J+M)
        X(J+M) = R * COS(Y(J+M))
        Y(J+M) = R * SIN(Y(J+M))
        ILI = ILI + 1
        IF(ILI .NE. 40) GO TO 180
        WRITE(II,2000)
        ILI = 0
180  CONTINUE
190  AUX2 = AUX2 + NNUA
      ILI = 0
      IF(AUX2 .NE. NNIC) GO TO 140
      AUX1 = AUX1 + NNIC
      IF(AUX1 .EQ. NNCI) GO TO 280
      GO TO 100
200  AUX2 = 0.
210  READ(IL,1000) NNUA,UA
      IF(UA .IS. 'GRAUS ') GO TO 230

```

```

      IF(UA .IS. 'RACIAN') GO TO 250
220  WRITE(II,1700)
      STOP
230  WRITE(II,1800)
      ILI = ILI + 3
      DO 240 I = 1,NNUA
          READ (IL,1300) J,X(J+M),Y(J+M),Z(J+M)
          WRITE(II,1400) J,X(J+M),Y(J+M),Z(J+M)
          Y(J+M) = Y(J+M) * 3.1415926536 / 180
          Z(J+M) = Z(J+M) * 3.1415926536 / 180
          R      = X(J+M) * SIN(Z(J+M))
          Z(J+M) = X(J+M) * COS(Z(J+M))
          X(J+M) = R      * COS(Y(J+M))
          Y(J+M) = R      * SIN(Y(J+M))
          ILI = ILI + 1
          IF(ILI .NE. 40) GO TO 240
          WRITE(II,2000)
          ILI = 0
240  CONTINUE
      GO TO 270
250  WRITE(II,1900)
      ILI = ILI + 3
      DO 260 I = 1,NNUA
          READ (IL,1300) J,X(J+M),Y(J+M),Z(J+M)
          WRITE(II,1400) J,X(J+M),Y(J+M),Z(J+M)
          R      = X(J+M) * SIN(Z(J+M))
          Z(J+M) = X(J+M) * COS(Z(J+M))
          X(J+M) = R      * COS(Y(J+M))
          Y(J+M) = R      * SIN(Y(J+M))
          ILI = ILI + 1
          IF(ILI .NE. 40) GO TO 260
          WRITE(II,2000)
          ILI = 0
260  CONTINUE
270  AUX2 = AUX2 + NNUA
      ILI = 0

```



```

      IF(AUX2 .NE. NNIC) GO TO 210
      AUX1 = AUX1 + NNIC
      IF(AUX1 .EQ. NNIC) GO TO 280
      GO TO 100
280  RETURN
1000 FORMAT(15,5X,A6)
1100 FORMAT(///33X,'O TIPO DE COORDENADA INDICADO'//31X,'NAO ESTA PREV
      -ISTO NESTE PROGRAMA.'//20X,'ESCOLHA COORDENADAS CARTESIANAS, CILIN
      -DRICAS OU ESFERICAS'//34X,5(' '), 'PROGRAMA ENCERRADO',5(' '))
1200 FORMAT(//20X,'CARTESIANAS'//26X,'NO',15X,'X',15X,'Y',15X,'Z'//)
1300 FORMAT(15,5X,3F10.0)
1400 FORMAT(/23X,I5,3(4X,E12.5))
1500 FORMAT(//20X,'CILINDRICAS - GRAUS'//26X,'NO',15X,'R',14X,'AX',
      -      15X,'Z'//)
1600 FORMAT(//20X,'CILINDRICAS - RADIANDS'//26X,'NO',15X,'R',14X,'AX',
      -      15X,'Z'//)
1700 FORMAT(///34X,'A UNIDADE DE ANGULO INDICADA'//31X,'NAO ESTA PREVI
      -STA NESTE PROGRAMA.'//35X,'ESCOLHA GRAUS OU RADIANDS.'//34X,5(' ')
      -,'PROGRAMA ENCERRADO',5(' '))
1800 FORMAT(//20X,'ESFERICAS - GRAUS'//26X,'NO',15X,'R',14X,'AX',
      -      14X,'AZ'//)
1900 FORMAT(//20X,'ESFERICAS - RADIANDS'//26X,'NO',15X,'R',14X,'AX',
      -      14X,'AZ'//)
2000 FORMAT(1H1//)
      END

```

SUBROUTINE AREAS (X1,X2,X3,Y1,Y2,Y3,Z1,Z2,Z3,A,B,C,AREA,II,J)

C

C *****

C

SUBROTINA PARA CALCULO DAS AREAS DOS ELEMENTOS TRIANGULARES

C

C

C

C

CALCULO DA AREA DO ELEMENTO TRIANGULAR

C

XI = X2 - X1

YI = Y2 - Y1

ZI = Z2 - Z1

XJ = X3 - X1

YJ = Y3 - Y1

ZJ = Z3 - Z1

A = YI * ZJ - YJ * ZI

B = ZI * XJ - ZJ * XI

C = XI * YJ - XJ * YI

AREA = 0.5 * SQRT(A ** 2 + B ** 2 + C ** 2)

IF (AREA .NE. 0.) RETURN

WRITE (II,1000) J

STOP

1000 FORMAT (///30X,'ERRO NA CONETIVIDADE DOS ELEMENTOS.'//32X,'A AREA

-DO ELEMENTO',X,I5,X,'E NULA.'//34X,5(' '),

-'PROGRAMA ENCERRADO',5(' '))

END

SUBROUTINE INDIC (X,Y,Z,CC1,IR,NLR,NNC,CS,IND)

C

C*****

C SUBROTINA PARA CALCULO DO VETOR DE INDICES - IND

C*****

C

COMMON

- /B004/ NTLR,NC

DIMENSION

- X(1),Y(1),Z(1),CC1(1),IR(1),CS(NTLR,NC),IND(1)

INTEGER

- CS

C

C

CALCULO DO VETOR "IR" E DA MATRIZ "CS"

C

DO 100 I = 1,NNC

IR(I) = 0

100 CONTINUE

NLR = 0

DO 130 I = 1,NNC-1

IF(IR(I) .EQ. 1) GO TO 130

DO 120 J = I+1,NNC

IF(ABS(X(J) - X(I)) .GT. 0.001) GO TO 120

IF(ABS(Y(J) - Y(I)) .GT. 0.001) GO TO 120

IF(ABS(Z(J) - Z(I)) .GT. 0.001) GO TO 120

IF(CC1(J) .IS. 'DERIVA') GO TO 110

IR(I) = 1

NLR = NLR + 1

CS(NLR,1) = J

CS(NLR,2) = I

GO TO 130

110 IR(J) = 1

NLR = NLR + 1

CS(NLR,1) = I

CS(NLR,2) = J

120 CONTINUE

130 CONTINUE

C
C
C

CALCULO DO VETOR "IND"

NO = 0

NI = NNC - NLR

DO 150 I = 1, NNC

IF(IRC(I) .EQ. 1) GO TO 140

NO = NO + 1

IND(NO) = I

GO TO 150

140 NI = NI + 1

IND(NI) = I

150 CONTINUE

RETURN

END

SUBROUTINE FMATR (X,Y,Z,CON,CC1,POT,F,VG,VH,NLR,P,ARE,NOR,CS,FF)

C
C*****
C SUBROTINA PARA COMPOSICAO DOS VETORES "VG" E "VH"
C*****
C

COMMON

- /B002/ II,NNC
- /B003/ NNE,NEL
- /B004/ NTLR,NC
- /B005/ GG(3),HH(3),K(3)
- /B006/ IG,NIL,I1,NL,FIM
- /B007/ QSI(12,3),DME(12)

DIMENSION

- X(1),Y(1),Z(1),CON(1),CC1(1),POT(1),F(1),
- VG(1),VH(1),CS(NTLR,NC),ARE(1),NOR(1),FF(1)

INTEGER

- CON,CS

REAL

- NOR

C
C CALCULO DOS VETORES "VG" E "VH"
C

NAUX = NNC
NIL = 30625 / NNC
IF(NNC .LE. 175) GO TO 100
NL = NIL
FIM = 0.
GO TO 110
100 NL = NNC
FIM = 1.
110 I1 = 0
IG = 1
120 DO 230 I = 1,NL
J1 = I1 + I
F(J1) = 0.

```

INN = I * NNC
DO 130 J = INN-NNC+1,INN
    VG(J) = 0.
    VH(J) = 0.
130 CONTINUE
DO 210 J = 1,NEL
    IJ = NNE * (J - 1)
    DO 140 M = 1,NNE
        K(M) = CON(IJ+M)
140 CONTINUE
    AREA = ARE(J)
    A = NOR(IJ+1)
    B = NOR(IJ+2)
    C = NOR(IJ+3)
    K1 = K(1)
    IF(K(3) .NE. J1) GO TO 150
    AUX = K(1)
    K(1) = K(3)
    K(3) = K(2)
    K(2) = AUX
    GO TO 170
150 IF(K(2) .NE. J1) GO TO 160
    AUX = K(1)
    K(1) = K(2)
    K(2) = K(3)
    K(3) = AUX
    GO TO 170
160 IF(K(1) .NE. J1) GO TO 180
170 CALL INTEG (X,Y,Z,AREA)
    FF(J1) = 0.
    GO TO 190
180 CALL INTEG (X,Y,Z,J1,FF,A,B,C,AREA,K1)
190 DO 200 L = 1,NNE
    KL = K(L)
    INK = (I - 1) * NNC + KL
    VG(INK) = VG(INK) + GG(L)

```

```

                VH(INK) = VH(INK) + HH(L)
200             CONTINUE
                F(J1) = F(J1) + FF(J1)
210             CONTINUE
                F(J1) = F(J1) * P / 6
                INI = (I - 1) * NNC + NIL * (IG - 1) + I
                DO 220 M = INN-NNC+1,INN
                    IF(M.EQ. INI) GO TO 220
                    VH(INI) = VH(INI) - VH(M)
220             CONTINUE
230             CONTINUE
                DO 250 M = 1,NL9
                    I = CS(M,1)
                    J = CS(M,2)
                    DO 240 L = 1,NL
                        LNI = (L - 1) * NNC + I
                        LNJ = (L - 1) * NNC + J
                        VH(LNI) = VH(LNI) + VH(LNJ)
240             CONTINUE
250             CONTINUE
C
C             CALCULO DA MATRIZ "A" E DO VETOR "F" DO SISTEMA,
C             SENDO "A" ALOCADA NO MESMO ESPACO DE "VG"
C
                DO 290 J = 1,NNC
                    IF(CC1(J).IS. 'POTENC') GO TO 270
                    DO 260 I = 1,NL
                        INJ = (I - 1) * NNC + J
                        AUX      = VG(INJ)
                        VG(INJ) = -VH(INJ)
                        VH(INJ) = -AUX
260             CONTINUE
270             DO 280 L = 1,NL
                    J1 = I1 + L
                    LNJ = (L - 1) * NNC + J
                    F(J1) = F(J1) + VH(LNJ) * POT(J)

```

```
280          CONTINUE
290 CONTINUE
   IF(FIM .EQ. 1.) GO TO 300
   WRITE(15) (VG(I), I = 1,NL*NNC)
   IG = IG + 1
   I1 = I1 + NL
   NAUX = NAUX - NL
   IF(NAUX .GT. NL) GO TO 120
   NL = NAUX
   FIM = 1.
   GO TO 120
300 RETURN
   END
```


SUBROUTINE INTEX (X,Y,Z,AREA)

C

C*****

C SUBROTINA PARA CALCULO DA INTEGRACAO EXATA

C*****

C

COMMON

- /B003/ NNE

- /B005/ GG(3),HH(3),K(3)

DIMENSION

- X(1),Y(1),Z(1)

REAL

- LDH

C

C CALCULO DOS VETORES AUXILIARES "GG" E "HH"

C

DO 100 L = 1,NNE

GG(L) = 0.

HH(L) = 0.

100 CONTINUE

K1 = K(1)

K2 = K(2)

K3 = K(3)

X21 = X(K2) - X(K1)

Y21 = Y(K2) - Y(K1)

Z21 = Z(K2) - Z(K1)

X31 = X(K3) - X(K1)

Y31 = Y(K3) - Y(K1)

Z31 = Z(K3) - Z(K1)

X32 = X(K3) - X(K2)

Y32 = Y(K3) - Y(K2)

Z32 = Z(K3) - Z(K2)

D12 = SQRT(X21 ** 2 + Y21 ** 2 + Z21 ** 2)

D13 = SQRT(X31 ** 2 + Y31 ** 2 + Z31 ** 2)

D23 = SQRT(X32 ** 2 + Y32 ** 2 + Z32 ** 2)

H = 2 * AREA / D23

```

DH2    =  SQRT(ABS(D12 ** 2 - H ** 2))
DH3    =  SQRT(ABS(D13 ** 2 - H ** 2))
YL2    =  (X32 * X21 + Y32 * Y21 + Z32 * Z21) / D23
YL3    =  (X32 * X31 + Y32 * Y31 + Z32 * Z31) / D23
IF(YL2 .LT. 0.) DH2 = -DH2
IF(YL3 .LT. 0.) DH3 = -DH3
LDH    =  ALOG((D13 + DH3) / (D12 + DH2))
DD      =  D12 - D13
HD      =  H / (2 * D23)
GG(1)  =  H * LDH / 2
GG(2)  =  HD * (DH3 * LDH + DD)
GG(3)  =  -HD * (DH2 * LDH + DD)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE INTEG (X,Y,Z,I,FF,A,B,C,AREA,K1)
C
C*****
C  SUBROTINA PARA CALCULO DE INTEGRACAO NUMERICA
C*****
C
COMMON
-      /B003/   NNE
-      /B005/   GG(3),HH(3),K(3)
-      /B007/   QSI(12,3),OME(12)
DIMENSION
-      X(1),Y(1),Z(1),R(12),FF(1)
C
C  CALCULO DOS VETORES AUXILIARES "GG","HH" E "FF"
C
DO 110 M = 1,12
  XM = 0.
  YM = 0.
  ZM = 0.
  DO 100 L = 1,NNE
    KL = K(L)
    XM = XM + QSI(M,L) * X(KL)
    YM = YM + QSI(M,L) * Y(KL)
    ZM = ZM + QSI(M,L) * Z(KL)
100  CONTINUE
    R1 = XM - X(I)
    R2 = YM - Y(I)
    R3 = ZM - Z(I)
    R(M) = SQRT(R1 ** 2 + R2 ** 2 + R3 ** 2)
110 CONTINUE
  D = - A * X(K1) - B * Y(K1) - C * Z(K1)
  ABC = A * X(I) + B * Y(I) + C * Z(I) + D
  FF(I) = 0.
  IF(ABS(ABC) .LE. 0.0001) GO TO 150
  DO 120 M = 1,12
    FF(I) = FF(I) - OME(M) / R(M)

```

```

120 CONTINUE
    FF(I) = FF(I) * ABC
    DO 140 L = 1,NNE
        GG(L) = 0.
        HH(L) = 0.
        DO 130 M = 1,12
            GG(L) = GG(L) + DME(M) * QSI(M,L) / R(M)
            HH(L) = HH(L) + DME(M) * QSI(M,L) / R(M) ** 3
130     CONTINUE
        GG(L) = GG(L) * AREA
        HH(L) = HH(L) * ABC / 2
140 CONTINUE
    RETURN
150 DO 170 L = 1,NNE
    GG(L) = 0.
    HH(L) = 0.
    DO 160 M = 1,12
        GG(L) = GG(L) + DME(M) * QSI(M,L) / R(M)
160     CONTINUE
    GG(L) = GG(L) * AREA
170 CONTINUE
    RETURN
    END

```

SUBROUTINE GAUSS (VG,VH,F,IND,IR,NLR,CC1,POT,X,Y,Z)

C

C*****

C SUBROTINA PARA CALCULO DO SISTEMA DE EQUACOES PELO METODO DE GAUSS

C*****

C

COMMON

- /B002/ II,NNC

- /B006/ IG,NIL,I1,NL,FIM

DIMENSION

- VG(1),VH(1),F(1),IND(1),IR(1),

- CC1(1),POT(1),X(1),Y(1),Z(1)

C

C

C

TRIANGULARIZACAO DA MATRIZ "A" ALODADA NO VETOR "VG"

IK = 0

IF(I1.EQ. 0) GO TO 110

WRITE(15) (VG(I), I = 1,NL*NNC)

NFL = NL

NTB = IG

IG = 1

I1 = 0

NAUX = NNC

NL = NIL

FIM = 0.

100 READ(15,IG) (VG(I), I = 1,NL*NNC)

IF(NL.EQ. 1) GO TO 330

NB = NTB - IG

110 NNN = NNC - NLR

JG = IG

DO 230 K = 1,NL-1

K1 = I1 + K

IF(IR(K1).EQ. 1) GO TO 230

IK = IK + 1

KNK = (K - 1) * NNC + NIL * (IG - 1) + K

IF(ABS(VG(KNK)).GT. 0.000000001) GO TO 170

```

DO 130 J = K+1,NL
    J1 = I1 + J
    IF(IR(J1) .EQ. 1) GO TO 130
    JNK = (J - 1) * NNC + NIL * (IG - 1) + K
    IF(ABS(VG(JNK)) .LE. 0.000000001) GO TO 130
    DO 120 I = IK,NNN
        ID = IND(I)
        JNI = (J - 1) * NNC + ID
        KNI = (K - 1) * NNC + ID
        AUX      = VG(JNI)
        VG(JNI) = VG(KNI)
        VG(KNI) = AUX
120    CONTINUE
        AUX      = F(J1)
        F(J1) = F(K1)
        F(K1) = AUX
        GO TO 170
130    CONTINUE
    IF(FIM .EQ. 1.) GO TO 310
    DO 160 L = 1,NB
        III = I1 + L * NIL
        IF(L .EQ. NB) NL = NFL
        IG = IG + 1
        READ(15,IG) (VH(I), I = 1,NL*NNC)
        DO 150 J = 1,NL
            J1 = III + J
            IF(IR(J1) .EQ. 1) GO TO 150
            JNK = (J - 1) * NNC + NIL * (JG - 1) + K
            IF(ABS(VH(JNK)) .LE. 0.000000001) GO TO 150
            DO 140 I = IK,NNN
                ID = IND(I)
                JNI = (J - 1) * NNC + ID
                KNI = (K - 1) * NNC + ID
                AUX      = VH(JNI)
                VH(JNI) = VG(KNI)
                VG(KNI) = AUX

```

```

140          CONTINUE
          AUX   = F(J1)
          F(J1) = F(K1)
          F(K1) = AUX
          WRITE(15,IG) (VH(I), I = 1,NL*NNC)
          IG = IG - L
          NL = NIL
          GO TO 170

150          CONTINUE
160          CONTINUE
          GO TO 310
170          DO 190 I = K+1,NL
              J1 = I1 + I
              IF(IR(J1).EQ. 1) GO TO 190
              INK = (I - 1) * NNC + NIL * (IG - 1) + K
              VG(INK) = VG(INK) / VG(KNK)
              DO 180 J = IK+1,NNN
                  IJ = IND(J)
                  INI = (I - 1) * NNC + IJ
                  KNI = (K - 1) * NNC + IJ
                  VG(INI) = VG(INI) - VG(KNI) * VG(INK)
180          CONTINUE
              F(J1) = F(J1) - F(K1) * VG(INK)
190          CONTINUE
          IF(FIM.EQ. 1.) GO TO 230
          DO 220 L = 1,NB
              II1 = I1 + L * NIL
              IF(L.EQ. NB) NL = NFL
              IG = IG + 1
              READ(15,IG) (VH(I), I = 1,NL*NNC)
              DO 210 I = 1,NL
                  J1 = II1 + I
                  IF(IR(J1).EQ. 1) GO TO 210
                  INK = (I - 1) * NNC + NIL * (JG - 1) + K
                  VH(INK) = VH(INK) / VG(KNK)
                  DO 200 J = IK+1,NNN

```

```

                IJ = IND(J)
                INI = (I - 1) * NNC + IJ
                KNI = (K - 1) * NNC + IJ
                VH(INI) = VH(INI) - VG(KNI) * VH(INK)
200             CONTINUE
                F(J1) = F(J1) - F(K1) * VH(INK)
210             CONTINUE
                WRITE(15,'IG) (VH(I), I = 1,NL*NNC)
220             CONTINUE
                IG = IG - NB
                NL = NIL
230             CONTINUE
                IF(FIM .EQ. 1.) GO TO 330
                K1 = I1 + K
                IF(IR(K1) .EQ. 1) GO TO 320
                IK = IK + 1
                KNK = (K - 1) * NNC + NIL * (IG - 1) + K
                IF(ABS(VG(KNK)) .GT. 0.000000001) GO TO 270
                DO 260 L = 1,NB
                    II1 = I1 + L * NL
                    IF(L .EQ. NB) NL = NFL
                    IG = IG + 1
                    READ(15,'IG) (VH(I), I = 1,NL*NNC)
                    DO 250 J = 1,NL
                        J1 = II1 + J
                        IF(IR(J1) .EQ. 1) GO TO 250
                        JNK = (J - 1) * NNC + NIL * (JG - 1) + K
                        IF(ABS(VH(JNK)) .LE. 0.000000001) GO TO 250
                        DO 240 I = IK,NNN
                            ID = IND(I)
                            JNI = (J - 1) * NNC + ID
                            KNI = (K - 1) * NNC + ID
                            AUX = VH(JNI)
                            VH(JNI) = VG(KNI)
                            VG(KNI) = AUX
240                     CONTINUE

```



```

      AUX   = F(J1)
      F(J1) = F(K1)
      F(K1) = AUX
      WRITE(15,IG) (VH(I), I = 1,NL*NNC)
      IG = IG - L
      NL = NIL
      GO TO 270

250      CONTINUE
260      CONTINUE
      GO TO 310
270      DO 300 L = 1,NB
          III = I1 + L * NIL
          IF(L .EQ. NB) NL = NFL
          IG = IG + 1
          READ(15,IG) (VH(I), I = 1,NL*NNC)
          DO 290 I = 1,NL
              J1 = III + I
              IF(IR(J1) .EQ. 1) GO TO 290
              INK = (I - 1) * NNC + NIL * (JG - 1) + K
              VH(INK) = VH(INK) / VG(KNK)
              DO 280 J = IK+1,NNN
                  IJ = IND(J)
                  INI = (I - 1) * NNC + IJ
                  KNI = (K - 1) * NNC + IJ
                  VH(INI) = VH(INI) - VG(KNI) * VH(INK)
280              CONTINUE
              F(J1) = F(J1) - F(K1) * VH(INK)
290              CONTINUE
              WRITE(15,IG) (VH(I), I = 1,NL*NNC)
300      CONTINUE
          IG = IG - NB
          NL = NIL
          GO TO 320
310      WRITE(II,1000) K1
          STOP
320      WRITE(15,IG) (VG(I), I = 1,NL*NNC)

```

```

IG = IG + 1
II = II + NL
NAUX = NAUX - NL
IF(NAUX .GT. NL) GO TO 100
NL = NAUX
FIM = 1.
GO TO 100

```

C
C
C CALCULO DOS POTENCIAIS E DERIVADAS POR RETROSUBSTITUICAO

```

330 IAB = 0
    IN = IND(NNN)
340 IUL = IN - (IG - 1) * NIL
    IF(IUL .GT. 0) GO TO 350
    IG = IG - 1
    IAB = 1
    GO TO 340
350 IF(IAB .EQ. 0) GO TO 360
    READ(15,IG) (VG(I), I = 1,IUL*NNC)
360 INI = (IUL - 1) * NNC + IN
    IF(ABS(VG(INI)) .LE. 0.000000001) GO TO 440
    F(IN) = F(IN) / VG(INI)
    IF(IUL .NE. 1) GO TO 370
    II = IN
    GO TO 410
370 JK = 0
    DO 390 K = 1,IUL-1
        JI = IN - K
        IF(IR(JI) .EQ. 1) GO TO 390
        JK = JK + 1
        IK = IUL - K
        INK = (IK - 1) * NNC + NIL * (IG - 1) + IK
        S = 0.
        DO 380 J = NNN-JK+1,NNN
            IJ = IND(J)
            INI = (IK - 1) * NNC + IJ

```

```

          S = S + VG(INI) * F(IJ)
380      CONTINUE
          F(J1) = (F(J1) - S) / VG(INK)
390 CONTINUE
400 IF(J1 .EQ. 1) GO TO 450
      I1 = J1
410 IG = IG - 1
      READ(15,IG) (VG(I), I = 1,NIL+NNC)
      DO 430 K = 0,NIL-1
          J1 = I1 - K - 1
          IF(IR(J1) .EQ. 1) GO TO 430
          JK = JK + 1
          IK = NIL - K
          INK = (IK - 1) * NNC + NIL + (IG - 1) * IK
          S = 0.
          DO 420 J = NNN-JK+1,NNN
              IJ = IND(J)
              INI = (IK - 1) * NNC + IJ
              S = S + VG(INI) * F(IJ)
420      CONTINUE
          F(J1) = (F(J1) - S) / VG(INK)
430 CONTINUE
      GO TO 400
440 WRITE(11,1000) IN
      STOP

```

C
C
C

COLOCACAO DOS POTENCIAIS EM "POT" E DAS DERIVADAS EM "F"

```

450 DO 460 I = 1,NNC
      IF(CC1(I) .IS. 'POTENC') GO TO 460
      AUX      = POT(I)
      POT(I) = F(I)
      F(I)    = AUX
460 CONTINUE
      NNN = NNC - NLR
      DO 480 I = 1,NNN

```

```

      ID = IND(I)
      DO 470 J = NNN+1,NNC
          IJ = IND(J)
          IF(ABS(X(IJ) - X(ID)) .GT. 0.001) GO TO 470
          IF(ABS(Y(IJ) - Y(ID)) .GT. 0.001) GO TO 470
          IF(ABS(Z(IJ) - Z(ID)) .GT. 0.001) GO TO 470
          POT(IJ) = POT(ID)
470      CONTINUE
480  CONTINUE
      RETURN
1000  FORMAT(///34X,'SINGULARIDADE NA LINHA',X,I5
-      //34X,5(' '), 'PROGRAMA ENCERRADO',5(' '))
      END

```

SUBROUTINE INTER (X,Y,Z,CON,POT,F,PI,VG,VH,ARE,NOR,FF)

C

C*****

C SUBROTINA PARA CALCULO DO POTENCIAL EM PONTOS INTERNOS

C*****

C

COMMON

- /B001/ P,NNI
- /B002/ II,NNC
- /B003/ NNE,NEL
- /B005/ GG(3),HH(3),K(3)
- /B007/ OSI(12,3),OME(12,3)

DIMENSION

- X(1),Y(1),Z(1),CON(1),POT(1),F(1),
- PI(1),VG(1),VH(1),IR(1),ARE(1),NOR(1),FF(1)

INTEGER

- CON

REAL

- NOR

C

C

C

CALCULO DOS POTENCIAIS NOS PONTOS INTERNOS

NAUX = NNI

NIL = 30625 / NNC

IF(NNI .LE. NIL) GO TO 100

NL = NIL

FIM = 0.

GO TO 110

100 NL = NNI

FIM = 1.

110 II = 0

120 DO 180 I = 1,NL

J1 = II + I

N = NNC + J1

PI(J1) = 0.

INN = I * NNC

```

DO 130 J = INN-NNC+1,INN
    VG(J) = 0.
    VH(J) = 0.
130 CONTINUE
DO 160 J = 1,NEL
    IJ = NNE * (J - 1)
    DO 140 M = 1,NNE
        K(M) = CON(IJ+M)
140 CONTINUE
    AREA = ARE(J)
    A = NOR(IJ+1)
    B = NOR(IJ+2)
    C = NOR(IJ+3)
    K1 = K(1)
    CALL INTEG (X,Y,Z,N,FF,A,B,C,AREA,K1)
    DO 150 L = 1,NNE
        KL = K(L)
        INK = (I - 1) * NNC + KL
        VG(INK) = VG(INK) + GG(L)
        VH(INK) = VH(INK) + HH(L)
150 CONTINUE
    PI(J1) = PI(J1) + FF(J1)
160 CONTINUE
    PI(J1) = PI(J1) * P / 6
    DO 170 J = 1,NNC
        INJ = (I - 1) * NNC + J
        PI(J1) = PI(J1) + F(J) * VG(INJ) - POT(J) * VH(INJ)
170 CONTINUE
    PI(J1) = PI(J1) / 12.56637
180 CONTINUE
    IF(FIM .EQ. 1.) GO TO 190
    I1 = I1 + NL
    NAUX = NAUX - NL
    IF(NAUX .GT. NL) GO TO 120
    NL = NAUX
    FIM = 1.

```

GO TO 120

190 RETURN

END

SUBROUTINE SAIDA (POT,F,PI,NNI)

C
C*****
C SUBROTINA PARA IMPRESSAO DOS RESULTADOS
C*****
C

COMMON

- /8002/ II,NNC

DIMENSION

- POT(1),F(1),PI(1)

C
C IMPRESSAO DOS POTENCIAIS E DERIVADAS NO CONTORNO
C

WRITE(II,1000)

ILI = 5

DO 100 I = 1,NNC

WRITE(II,1100) I,POT(I),F(I)

ILI = ILI + 1

IF(ILI .NE. 40) GO TO 100

WRITE(II,1400)

ILI = 0

100 CONTINUE

IF(NNI .EQ. 0) GO TO 120

C
C IMPRESSAO DOS POTENCIAIS NOS PONTOS INTERNOS
C

WRITE(II,1200)

ILI = 4

DO 110 I = 1,NNI

WRITE(II,1300) I,PI(I)

ILI = ILI + 1

IF(ILI .NE. 40) GO TO 110

WRITE(II,1400)

ILI = 0

110 CONTINUE

120 RETURN


```

1000 FORMAT(1H1//20X,'RESULTADOS DO PROGRAMA'///20X,'POTENCIAIS E ',
-          'DERIVADAS NO CONTORNO'///26X,'ND',7X,'POTENCIAL',8X,
-          'DERIVADA'/)
1100 FORMAT(/23X,I5,2(4X,E12.5))
1200 FORMAT(1H1///20X,'POTENCIAIS NOS PONTOS INTERNOS'
-          '///26X,'ND',7X,'POTENCIAL'/)
1300 FORMAT(/23X,I5,4X,E12.5)
1400 FORMAT(1H1//)
      END

```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. BREBBIA, Carlos A. - The Boundary Element Method for Engineers, London, Pentech Press, 1978. 188 p.
2. KUTATELADZE, S.S. e BORISHANSKII, V.M. - A Concise Encyclopedia of Heat Transfer, Pergamon Press Ltd., 1966. 489 p.
3. LAMBE, T. William e WHITMAN, Robert V. - Mecânica de Suelos, México, Editorial Limusa, 1976.
4. SPIEGEL, Murray R. - Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas. Coleção Schaum, Editora Mc Graw - Hill do Brasil Ltda., 1977. 270 p.
5. HAMMER, P.C., MARLOVE, O.J. e STROUD, A. H. - Numerical Integration over Simplex and Cones. Mathematical Tables and Other Aids to Computation, Vol. 10, 1956.
6. SÁ, Pedro A. C. O. de - O Conceito de Nós Múltiplos na Aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Problemas de Campo - Trabalho a ser publicado.
7. HALBRITTER, A. L., TELLES, J. C. de Faria e MANSUR, W.J. - Aplicação dos Elementos de Contorno a Problemas de Campo. Anais da Conferência Sobre Análise, Projeto e Construção de Estruturas Centrais Nucleares, pp. 707-724, Porto Alegre, 1978.
8. CHAUDONNERET, Madeleine - On the Discontinuity of The Stress Vector In The Boudary Integral Equation Method For Elastic Analysis. London.

- 9.. CRUSE, T. A. - Application of the Boundary Integral Equation Solution in Solid Mechanics. Variational Methods in Engineering. Proceedings of an International Conference held at the University of Southampton, Vol. II : 9/1-9/29, 1972.
10. GILL, S. - Structures for Nuclear Power, London, F. J. Parsons Ltd., 1964. 398 p.